Μαθηματική Ανάλυση Ι

Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

5ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Άσκηση 1 (Άλγεβρα Σειρών).

(i) Δώστε το παράδειγμα δύο ακολουθιών $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ για τις οποίες η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ συγκλίνει αλλά οι σειρές $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ και $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ αποκλίνουν.

(ii) Δείξτε ότι αν οι σειρές $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ και $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ συγκλίνουν τότε η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ συγκλίνει επίσης.

(iii) Δείξτε ότι αν $c\neq 0$ και η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}c\cdot a_n$ συγκλίνει τότε και η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ συγκλίνει.

Άσκηση 2 (Διερεύνηση σύγκλισης σειράς). Εξετάστε ως προς τη σύγλιση τις ακόλουθες σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^n,\quad \text{όπου } |x|\geq 1,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n}\,,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n+(-1)^{n+1}\right].$$

Άσκηση 3 (Πεπερασμένο άθροισμα γεωμετρικής προόδου). Δίνονται $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ και $n\geq 1$. Δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{n}x^{k-1}=\frac{1-x^n}{1-x}$$

και

$$\sum_{k=1}^{n}x^{k}=\frac{x(1-x^n)}{1-x}\,.$$

Υπόδειξη: Ένας τρόπος να αποδειχθεί η πρώτη ισότητα είναι με επαγωγή. Ένας άλλος τρόπος είναι να υπολογίσετε: $(1-x)\cdot\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}x^{k-1}-x\cdot\sum_{k=1}^{n}x^{k-1}=\ldots.$

Σειρές με σημείο εκκίνησης το 0. Όμοια με τις σειρές $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ μπορεί κανείς να ορίσει και την έννοια της σειράς $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$, δηλαδή το σημείο εκκίνησης είναι το $n=0$. Η διαφορά εδώ είναι ότι η ακολουθία $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ των μερικών αθροισμάτων ορίζεται ως ακολούθως: $s_1 = a_0$, $s_2 = a_0 + a_1$, $s_3 = a_0 + a_1 + a_2$, γενικά $s_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$, όπου $n \in \mathbb{N}$. Με άλλα λόγια

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}}\,.$$

Μια σειρά της μορφής $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Όλα τα αποτελέσματα που ισχύουν για τις σειρές με σημείο εκκίνησης το 1 ισχύουν και για τις σειρές με σημείο εκκίνησης το 0.

Άσκηση 4. Δίνεται $\lambda \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n$ συγκλίνει αν και μόνο αν $|\lambda| < 1$. Δείξτε επίσης ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n = \frac{1}{1-\lambda}$$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ με $0 < |\lambda| < 1$.

Μπορείτε να πάρετε δεδομένες τις αντίστοιχες ιδιότητες για τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n$.

Σχόλιο. Η $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n$ ονομάζεται επίσης **γεωμετρική σειρά** και το λ ονομάζεται ο **λόγος** της σειράς.

Άσκηση 5 (Εύρεση ορίου σειράς). Να προσδιορίσετε τα $x \in \mathbb{R}$, για τα οποία συγκλίνουν οι σειρές

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$$

και

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$$

Στη συνέχεια, για αυτά τα x που είναι διάφορα του 0, να βρείτε τον αριθμό στον οποίο συγκλίνουν.

Άσκηση 6 (Εύρεση ορίου σειράς). Βρείτε το όριο των ακόλουθων σειρών:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^{n+3} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1} - 4^{n+2}}{5^{n+1}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}\,.$$

Άσκηση 7 (Εύρεση ορίου σειράς). Αποδείξτε ότι αν $\lim_{n\to+\infty} \beta_n = \beta$ και $\alpha_n = \beta_n - \beta_{n+1}\,, n \in \mathbb{N}$, τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \beta_1 - \beta\,.$$

Άσκηση 8 (Κριτήριο Σύγκρισης). Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(n^2+1)}{2^n}\ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)\ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-2}\ .$$

Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την ανισότητα $\sin x \leq x$ για κάθε $x \geq 0$.

Άσκηση 9 (Κριτήριο Λόγου). Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}\ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}\ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot n!}{n^n}\ .$$

Άσκηση 10 (Κριτήριο Ρίζας). Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}\ .$$

Άσκηση 11 (Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης). Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{4n^5-3n+1}\ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2n+1}{n^{7/2}+2}\ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n-5}{2^n}\ .$$

Υπόδειξη: Στην πρώτη σειρά θεωρήστε την ακολουθία $b_n = \frac{n^3}{n^5} = \frac{1}{n^2}$, $n \geq 1$. Ακολουθήστε παρόμοιο συλλογισμό στις άλλες δύο σειρές.

Άσκηση 12 (Διερεύνηση σύγκλισης σειράς). Ελέγξτε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

$$(\alpha)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)(n+5)}\ , \qquad (\beta)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{5n+7}\ .$$

Άσκηση 13 (Διερεύνηση σύγκλισης σειράς). Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές όπως ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}\ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos(n)}{3^n}\ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-3}\ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5+1/n)^n}{(2^n)^2}\ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n \cdot (n!)^2}\ ,$$

ως προς τη σύγκλιση.

Άσκηση 14 (Διερεύνηση σύγκλισης σειράς). Ελέγξτε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

$$(\alpha)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!n!}{(3n)!}\ , \qquad (\beta)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{4^n}\ , (\gamma)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!}\ .$$

Άσκηση 15 (Διερεύνηση απόλυτης σύγκλισης σειράς).

Θεωρούμε την ακολουθία $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$. Εξετάστε τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

ως προς τη σύγκλιση και την απόλυτη σύγκλιση.

Άσκηση 16 (Διερεύνηση απόλυτης σύγκλισης σειράς).

(i) Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(n \cdot \pi + \frac{1}{n}\right)$$

συγκλίνει.

Υπόδειξη: Δείξτε αρχικά ότι $\sin\left(n \cdot \pi + \dfrac{1}{n}\right) = (-1)^n \cdot \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$ για κάθε n.

(ii) Δείξτε ότι η προηγούμενη σειρά **δεν** συγκλίνει **απολύτως**.

Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την ανισότητα $\dfrac{2}{\pi} \cdot x \leq \sin x$, όπου $x \in [0, \pi/2]$.

(iii) Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2 - \sqrt{n}}$$

συγκλίνει.

(iv) Εξετάστε τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{n+1}+1}\right)$$

ως προς τη σύγκλιση.

Άσκηση 17 (Ανισότητα Young με εκθέτη το 2). Δείξτε ότι για $a, b \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$|a \cdot b| \leq \frac{a^2 + b^2}{2} \, .$$

Άσκηση 18. Έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνει.

(i) Δείξτε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $|\alpha_n| < 1$.

(ii) Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$ συγκλίνει επίσης. Ισχύει το αντίστροφο?

(iii) Υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ συγκλίνει. Να δείξετε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n$ συγκλίνει απολύτως.

Υπόδειξη. Στο (i) να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό του ορίου ακολουθίας και στα (ii), (iii) το κριτήριο σύγκρισης. Θα χρειαστείτε και την ανισότητα Young.

Άσκηση 19 (Σύγκλιση σειράς). Έστω $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{2+n^2\alpha_n}$$

συγκλίνει.

Άσκηση 20. Δίνεται μια ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που ικανοποιεί

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2+a_n^2}\,,\ \text{για κάθε } n\in\mathbb{N} \text{ και } a_1 > 0\,.$$

Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές ως προς τη σύγκλιση.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \Big(a_n + \frac{1}{n}\Big)\,.$$

Υπόδειξη. Δείξτε ότι η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνησίως φθίνουσα κάτω φραγμένη και υπολογίστε το όριό της.