



5ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Άσκηση 1 (Άλγεβρα Σειρών).

- (i) Δώστε το παράδειγμα δύο ακολουθιών $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ για τις οποίες η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ συγκλίνει αλλά οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνουν.
- (ii) Δείξτε ότι αν οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ και $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνουν τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει επίσης.
- (iii) Δείξτε ότι αν $c \neq 0$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ συγκλίνει τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Άσκηση 2 (Διερεύνηση σύγκλισης σειράς). Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις ακόλουθες σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n, \quad \text{όπου } |x| \geq 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n + (-1)^{n+1}].$$

Άσκηση 3 (Πεπερασμένο άθροισμα γεωμετρικής προόδου). Δίνονται $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ και $n \geq 1$. Δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^n x^{k-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

και

$$\sum_{k=1}^n x^k = \frac{x(1 - x^n)}{1 - x}.$$

Υπόδειξη: Ένας τρόπος να αποδειχθεί η πρώτη ισότητα είναι με επαγωγή. Ένας άλλος τρόπος είναι να υπολογίσετε: $(1 - x) \cdot \sum_{k=1}^n x^{k-1} = \sum_{k=1}^n x^{k-1} - x \cdot \sum_{k=1}^n x^{k-1} = \dots$

Άσκηση 4 (Εύρεση ορίου σειράς). Να προσδιορίσετε τα $x \in \mathbb{R}$, για τα οποία συγκλίνουν οι σειρές

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

και

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

Στη συνέχεια, για αυτά τα x , να βρείτε τον αριθμό στον οποίο συγκλίνουν.

Άσκηση 5 (Εύρεση ορίου σειράς). Βρείτε το όριο των ακόλουθων σειρών:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^{n+3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1} - 4^{n+2}}{5^{n+1}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Άσκηση 6 (Εύρεση ορίου σειράς). Αποδείξτε ότι αν $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = \beta$ και $\alpha_n = \beta_n - \beta_{n+1}, n \in \mathbb{N}$, τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \beta_1 - \beta.$$

Άσκηση 7 (Κριτήριο Σύγκρισης). Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(n^2 + 1)}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-2}.$$

Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την ανισότητα $\sin x \leq x$ για κάθε $x \geq 0$.

Άσκηση 8 (Κριτήριο Λόγου). Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot n!}{n^n}.$$

Άσκηση 9 (Κριτήριο Ρίζας). Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}.$$

Άσκηση 10 (Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης). Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 1}{4n^5 - 3n + 1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 2n + 1}{n^{7/2} + 2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n - 5}{2^n}.$$

Υπόδειξη: Στην πρώτη σειρά θεωρήστε την ακολουθία $b_n = \frac{n^3}{n^5} = \frac{1}{n^2}, n \geq 1$. Ακολουθήστε παρόμοιο συλλογισμό στις άλλες δύο σειρές.

Άσκηση 11 (Διερεύνηση σύγκλισης σειράς). Ελέγξτε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

$$(\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)(n+5)}, \quad (\beta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{5n+7}.$$

Άσκηση 12 (Διερεύνηση σύγκλισης σειράς). Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές όπως ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos(n)}{3^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5 + 1/n)^n}{(2^n)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n \cdot (n!)^2},$$

ως προς τη σύγκλιση.

Άσκηση 13 (Διερεύνηση σύγκλισης σειράς). Ελέγξτε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

$$(\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!n!}{(3n)!}, \quad (\beta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{4^n}, \quad (\gamma) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!}.$$

Άσκηση 14 (Διερεύνηση απόλυτης σύγκλισης σειράς).

Θεωρούμε την ακολουθία $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$. Εξετάστε τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

ως προς τη σύγκλιση και την απόλυτη σύγκλιση.

Άσκηση 15 (Διερεύνηση απόλυτης σύγκλισης σειράς).

(i) Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(n \cdot \pi + \frac{1}{n}\right)$$

συγκλίνει.

Υπόδειξη: Δείξτε αρχικά ότι $\sin\left(n \cdot \pi + \frac{1}{n}\right) = (-1)^n \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ για κάθε n .

(ii) Δείξτε ότι η προηγούμενη σειρά **δεν** συγκλίνει **απολύτως**.

Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την ανισότητα $\frac{2}{\pi} \cdot x \leq \sin x$, όπου $x \in [0, \pi/2]$.

(iii) Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2 - \sqrt{n}}$$

συγκλίνει.

(iv) Εξετάστε τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{n+1}+1} \right)$$

ως προς τη σύγκλιση.

Άσκηση 16 (Ανισότητα Young με εκθέτη το 2). Δείξτε ότι για $a, b \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$|a \cdot b| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Άσκηση 17. Έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνει.

(i) Δείξτε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $|\alpha_n| < 1$.

(ii) Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$ συγκλίνει επίσης. Ισχύει το αντίστροφο?

(iii) Υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ συγκλίνει. Να δείξετε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n$ συγκλίνει απολύτως.

Υπόδειξη. Στο (i) να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό του ορίου ακολουθίας και στα (ii), (iii) το κριτήριο σύγκρισης. Θα χρειαστείτε και την ανισότητα Young.

Άσκηση 18 (Σύγκλιση σειράς). Έστω $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{2 + n^2 \alpha_n}$$

συγκλίνει.

Άσκηση 19. Δίνεται μια ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ που ικανοποιεί

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2 + a_n^2}, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N} \text{ και } a_1 > 0.$$

Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές ως προς τη σύγκλιση.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(a_n + \frac{1}{n}\right).$$

Υπόδειξη. Δείξτε ότι η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι γνησίως φθίνουσα κάτω φραγμένη και υπολογίστε το όριό της.