Μαθηματική Ανάλυση Ι

Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

4ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Άσκηση 1 (Υπολογισμός ορίου). Έστω a, b θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}\,.$$

Λύση - υποδείξεις.
Αν $\gamma = \max\{a, b\}$, τότε

$$\gamma = \sqrt[n]{\gamma^n} \leq \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq \sqrt[n]{2\gamma^n} = \gamma\sqrt[n]{2}\,,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς (και αφού $\sqrt[n]{2} \to 1$) έχουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \gamma\,.$$

Άσκηση 2 (Ακολουθία με μεταβαλλόμενο πλήθος προσθετέων). Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right).$$

Λύση - υποδείξεις.
Έχουμε ότι

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{n^2+n}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1$$

καθώς και

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{n^2+1}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1.$$

Από το Κριτήριο Παρεμβολής προκύπτει ότι

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) = 1\,.$$

Σχόλιο. Δεν είναι σωστή επίλυση να πάρουμε το όριο σε κάθε όρο του αθροίσματος ξεχωριστά γιατί το άθροισμα έχει μεταβαλλόμενο πλήθος όρων.

Άσκηση 3 (Ακολουθία με μεταβλητό πλήθος προσθετέων). Θεωρούμε την ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με
$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}\,.$$
Δείξτε ότι για κάθε $n \geq 1$ ισχύει:

(i) $x_{n+1} - x_n > 0$,

(ii) $x_n < 1$.

Τι συμπεραίνετε για την ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$; (Μην επιχειρήσετε να υπολογίσετε κάποιο όριο.)

Λύση - υποδείξεις.
(i) Για κάθε $n \geq 1$ ισχύει:
$$\begin{aligned}
x_{n+1} - x_n &= \frac{1}{(n+1)+1} + \frac{1}{(n+1)+2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)+(n+1)} \\
&\quad - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \cdots - \frac{1}{n+n} \\
&= \qquad \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \\
&\quad - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \ldots\ldots\ldots\ldots - \frac{1}{2n} \\
&= -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \\
&= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0
\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι $2n+1 < 2n+2$.

(ii) Παρατηρούμε ότι για κάθε $k = 1, \ldots, n$ ισχύει $\dfrac{1}{n+k} \leq \dfrac{1}{n+1}$ επομένως
$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+1} = n\cdot\frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1,$$
για κάθε $n \geq 1$. (Στον ορισμό του x_n έχουμε n προσθετέους.)

Εφόσον η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνησίως αύξουσα και άνω φραγμένη προκύπτει ότι είναι και συγκλίνουσα.

Σχόλιο: Μπορεί να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας ολοκληρώματα ότι $x_n \to \ln(2)$.

Άσκηση 4 (Κριτήριο Ρίζας).

(i) (Απαιτητική) Έστω (α_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|} < 1\,.$$
Δείξτε ότι
$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0\,.$$

(ii) Δείξτε ότι
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^n = 0\,.$$

Λύση - υποδείξεις.

(i) Θέτουμε

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|} < 1\,.$$

Τότε, για $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει

$$\sqrt[n]{|\alpha_n|} < \rho + \varepsilon < 1.$$

Επομένως θέτοντας $\lambda = \rho + \varepsilon < 1$, έχουμε για κάθε $n \geq n_0$,

$$0 \leq |\alpha_n| < \lambda^n.$$

Αφού $|\lambda| < 1$ έχουμε $\lambda^n \to 0$ και από το Κριτήριο Παρεμβολής ότι $|\alpha_n| \to 0$ και άρα

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0\,.$$

(ii) Εφαρμογή του (i).

Άσκηση 5 (Κριτήριο Λόγου).

(i) (Απαιτητική) Έστω $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία μη-μηδενικών αριθμών με

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| = \rho < 1\,.$$

Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0\,.$$

(ii) (Ένα πολύ σημαντικό όριο) Δείξτε ότι, για κάθε πραγματικό αριθμό x, ισχύει ότι

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0\,.$$

Λύση - υποδείξεις.

(i) Από τον ορισμό του ορίου ακολουθίας, για $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό για το οποίο $\rho + \varepsilon < 1$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει

$$\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| < \rho + \varepsilon.$$

Θέτουμε $\lambda = \rho + \varepsilon < 1$ και πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις πιο πάνω ανισότητες από n_0 έως n:

$$\left|\frac{\alpha_{n_0+1}}{\alpha_{n_0}}\right| \cdot \left|\frac{\alpha_{n_0+2}}{\alpha_{n_0+1}}\right| \cdot \cdots \cdot \left|\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}\right| \cdot \left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| < \lambda^{n-n_0+1}.$$

Το αριστερό μέρος της τελευταίας ανισότητας μετά διαγραφές είναι ίσο με $\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_{n_0}}\right|$. Συνεπώς παίρνουμε

$$|\alpha_{n+1}| < |\alpha_{n_0}| \cdot \lambda^{-n_0+1} \cdot \lambda^n$$

δηλαδή $|\alpha_{n+1}| < c\lambda^{n+1}$ για κάθε $n \geq n_0$, όπου $c = |\alpha_{n_0}|\lambda^{-n_0+1}$.

Αφού $0 < \lambda < 1$ έχουμε $\lambda^n \to 0$ και το συμπέρασμα προκύπτει από τα πιο πάνω και το Κριτήριο Παρεμβολής. (Αν $\alpha_{n+1} \to 0$ τότε και $\alpha_n \to 0$.)

(ii) Το συμπέρασμα είναι σαφές για $x = 0$. Για $x \neq 0$ εφαρμόζουμε το (i) στην ακολουθία $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $\alpha_n = \frac{x^n}{n!}$ για κάθε $n \geq 1$ και έχουμε:

$$\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{x^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!}\right| = \left|\frac{x}{n}\right| \to 0 < 1.$$

Άσκηση 6 (Εφαρμογή Κριτηρίων Λόγου - Ρίζας). Δείξτε ότι οι πιο κάτω ακολουθίες συγκλίνουν στο 0.

$$a_n = \frac{n^3}{3^n}, \quad n \geq 1,$$

$$b_n = \frac{2^n \cdot n!}{n^n}, \quad n \geq 1,$$

$$c_n = \left(\frac{3n^2+n+1}{7n^4+1}\right)^n \quad n \geq 1,$$

$$d_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \quad n \geq 1.$$

Υπόδειξη: Για τη δεύτερη και την τέταρτη ακολουθία θυμίζουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \in (2,3)$.

Λύση - υποδείξεις.
Έχουμε

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^3} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{3} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^3 \longrightarrow \frac{1}{3} \cdot (1+0) = \frac{1}{3} < 1.$$

Από το Κριτήριο Λόγου ισχύει $a_n \to 0$.

Προχωράμε στην επόμενη ακολουθία:

$$\begin{aligned}\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} &= \frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n \cdot n!} = 2 \cdot \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\ &= 2\cdot(n+1)\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\ &= 2 \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \longrightarrow \frac{2}{e} < 1.\end{aligned}$$

Επομένως πάλι από το Κριτήριο Λόγου έχουμε $b_n \to 0$.

Στις επόμενες δύο ακολουθίες εφαρμόζουμε το Κριτήριο Ρίζας.

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \frac{3n^2+n+1}{7n^4+1} = \frac{\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}}{7+\frac{1}{n^4}} \longrightarrow \frac{0}{7} = 0 < 1.$$

Επομένως από το Κριτήριο Ρίζας έχουμε $c_n \to 0$. Τέλος

$$\sqrt[n]{|d_n|} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2\cdot\frac{1}{n}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \longrightarrow \frac{1}{e} < \frac{1}{2} < 1.$$

Από το Κριτήριο Ρίζας προκύπτει $d_n \to 0$.

Άσκηση 7 (Υπολογισμός ορίου). Να υπολογίσετε τα όρια:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} n\lambda^n$, όπου $|\lambda| < 1$,

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

Λύση - υποδείξεις.
(i)

$$\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \lim_{n\to+\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cdot(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0\,.$$

(ii)

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)\lambda^{n+1}}{n\lambda^n}\right| = |\lambda| < 1$$

και συνεπώς από το Κριτήριο Λόγου η ακολουθία $(n\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο 0.
(iii)

$$\begin{aligned} 0 < \frac{(n!)^2}{(2n)!} &= \frac{n!}{(n+1)(n+2)...(n+n)} \\ &= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{2}{n+2}\cdots\frac{n}{n+n} \\ &< \frac{1}{n+1}\,. \end{aligned}$$

Επομένως από το Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!} = 0$.

Άσκηση 8 (Αναδρομικά ορισμένη ακολουθία και σύγκλιση). Ορίζουμε την ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με αναδρομή ως εξής:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} \quad n \geq 1.$$

Δείξτε ότι:

(i) $0 < a_n < 2$ για κάθε $n \geq 1$,

(ii) $a_n < a_{n+1}$ για κάθε $n \geq 1$,

(iii) $a_n \to \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Υπόδειξη. Στα (i) και (ii) χρησιμοποιείστε την Αρχή της Επαγωγής.

Λύση - υποδείξεις.
(i) Προφανώς ισχύει $0 < a_1 < 2$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \geq 1$ ισχύει $0 < a_n < 2$ και δείχνουμε ότι $0 < a_{n+1} < 2$. Έχουμε

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt{1+a_n} \\ &> \sqrt{1+0} \quad \text{(από Επαγωγική Υπόθεση)} \\ &= 1 > 0. \end{aligned}$$

Επιπλέον

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt{1+a_n} \\ &< \sqrt{1+2} \quad \text{(από Επαγωγική Υπόθεση)} \\ &= \sqrt{3} < \sqrt{4} = 2. \end{aligned}$$

Επομένως $0 < a_{n+1} < 2$ και από την Αρχή Επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.
(ii) Για $n = 1$ ισχύει

$$a_1 = 1 < \sqrt{2} = a_2.$$

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \geq 1$ ισχύει $a_n < a_{n+1}$ και δείχνουμε ότι $a_{n+1} < a_{n+2}$. Έχουμε

$$a_n < a_{n+1} \iff 1+a_n < 1+a_{n+1} \iff \sqrt{1+a_n} < \sqrt{1+a_{n+1}} \iff a_{n+1} < a_{n+2}.$$

Επομένως $a_{n+1} < a_{n+2}$ και από την Αρχή Επαγωγής προκύπτει το ζητούμενο.
(iii) Εφόσον η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνησίως αύξουσα και άνω φραγμένη τότε συγκλίνει σε κάποιο αριθμό a. (*Προσοχή*: Μην ξεχνάτε να το αναφέρετε αυτό, γιατί αν δεν αιτιολογήσετε την

ύπαρξη του ορίου τότε δεν μπορείτε να πάρετε τα όρια στις δύο πλευρές της ισότητας όπως κάνουμε πιο κάτω.)

Αφού $a_n \to a$ έχουμε επίσης $a_{n+1} \to a$. Παίρνοντας όρια και στις δύο πλευρές της ισότητας $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$ προκύπτει η εξίσωση

$$a = \sqrt{1 + a}.$$

Λύνουμε

$$a^2 = 1 + a \iff a^2 - a - 1 = 0 \iff a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Εφόσον $a_n > 0$ για κάθε $n \geq 1$ έχουμε $a = \lim_{n\to\infty} a_n \geq 0$. Επομένως η λύση $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ απορρίπτεται και άρα $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Έχουμε δηλαδή $a_n \to \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Άσκηση 9 (Αναδρομικά ορισμένη ακολουθία και σύγκλιση). Ορίζουμε την ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με αναδρομή ως εξής:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 6 \cdot \frac{1 + a_n}{7 + a_n} \quad n \geq 1.$$

Δείξτε ότι

(i) $1 \leq a_n \leq 2$ για κάθε $n \geq 1$.

Υπόδειξη. Χρησιμοποιείστε την Αρχή της Επαγωγής. Μπορείτε να αναδιατυπώσετε τις ζητούμενες ανισότητες $1 \leq a_{n+1} \leq 2$ σε πιο απλές ισοδύναμες ανισότητες.

(ii) $a_{n+1} \geq a_n$ για κάθε $n \geq 1$.

(iii) $a_n \to 2$.

Λύση - υποδείξεις.

(i) Για $n = 1$ έχουμε $a_1 = 1 \in [1, 2]$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \geq 1$ έχουμε $1 \leq a_n \leq 2$. Δείχνουμε ότι $1 \leq a_{n+1} \leq 2$. Υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} \geq 1 &\iff 6 \cdot \frac{1 + a_n}{7 + a_n} \geq 1 \\
&\iff 6 + 6a_n \geq 7 + a_n \quad \text{(παρατηρήστε ότι από την Επαγωγική Υπόθεση ισχύει} \\
&\qquad\qquad 7 + a_n \geq 8 > 0, \text{ επομένως η φορά της ανισότητας δεν αλλάζει} \\
&\qquad\qquad \text{όταν πολλαπλασιάζουμε με } 7 + a_n) \\
&\iff 5a_n \geq 1 \\
&\iff a_n \geq \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει γιατί από την Επαγωγική Υπόθεση έχουμε $a_n \geq 1$. Από τις προηγούμενες ισοδυναμίες προκύπτει $a_{n+1} \geq 1$. Δείχνουμε όμοια ότι $a_{n+1} \leq 2$:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} \leq 2 &\iff 6 \cdot \frac{1 + a_n}{7 + a_n} \leq 2 \\
&\iff 6 + 6a_n \leq 14 + 2a_n \qquad \text{(πάλι από την Επαγωγική Υπόθεση } 7 + a_n > 0) \\
&\iff 4a_n \leq 8 \\
&\iff a_n \leq 2
\end{aligned}$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει από την Επαγωγική Υπόθεση, επομένως $a_{n+1} \leq 2$. Από την Αρχή Επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.

(ii) Έχουμε

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 6 \cdot \frac{1+a_n}{7+a_n} \\ &\geq 6 \cdot \frac{1+a_n}{9} \qquad (\text{από το (i) αφού } 7+a_n \leq 7+2 \leq 9) \\ &= \frac{2}{3} \cdot (1+a_n) \\ &= \frac{2}{3} + \frac{2a_n}{3} \\ &\geq \frac{a_n}{3} + \frac{2a_n}{3} \quad (\text{πάλι από το (i) αφού έχουμε } 2 \geq a_n) \\ &= a_n. \end{aligned}$$

(iii) Από τα (i) και (ii) η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, επομένως συγκλίνει σε κάποιο $a \in \mathbb{R}$. Θα αποδείξουμε ότι $a = 2$. Αφού $a_n \to a$ τότε $a_{n+1} \to a$. Θεωρούμε τη σχέση

$$a_{n+1} = 6 \cdot \frac{1+a_n}{7+a_n}$$

και παίρνουμε το όριο και στις δύο πλευρές. Καταλήγουμε

$$a = 6 \cdot \frac{1+a}{7+a}$$

Λύνοντας την εξίσωση μπορούμε να υπολογίσουμε το a,

$$\begin{aligned} a = 6 \cdot \frac{1+a}{7+a} &\iff 7a + a^2 = 6 + 6a \\ &\iff a^2 + a - 6 = 0 \\ &\iff (a+3)(a-2) = 0 \\ &\iff a = -3 \quad \text{ή} \quad a = 2. \end{aligned}$$

Αφού $1 \leq a_n \leq 2$ για κάθε $n \geq 1$, τότε και το όριο a θα ικανοποιεί $1 \leq a \leq 2$. Επομένως η λύση $a = -3$ απορρίπτεται και προκύπτει $a = 2$.

Άσκηση 10 (Αναδρομικά ορισμένη ακολουθία και σύγκλιση). Δίνεται η ακολουθία $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που ορίζεται με τον αναδρομικό τύπο

$$\alpha_1 = 1\,, \;\; \alpha_{n+1} = \sqrt{3\alpha_n}\,.$$

(i) Δείξτε, χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, ότι η $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι άνω φραγμένη από τον αριθμό 3.
(ii) Δείξτε ότι η $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα.
(iii) Εξηγήστε το λόγο για τον οποίο συγκλίνει η $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και στη συνέχεια υπολογίστε το όριό της.

Λύση - υποδείξεις.
(i) Για $n = 1$ έχουμε $\alpha_1 = 1 < 3$, που ισχύει. Έστω ότι ισχύει για την τιμή n. Τότε

$$\alpha_{n+1} = \sqrt{3\alpha_n} \leq \sqrt{9} = 3\,.$$

Επομένως, από την αρχή της μαθηματικής επαγωγής $\alpha_n \leq 3$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
(ii) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\alpha_n \leq \alpha_{n+1} \Leftrightarrow \alpha_n^2 - 3\alpha_n \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \alpha_n \leq 3$$

το οποίο ισχύει από το (i). Άρα η ακολουθία $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα. (iii) Τέλος από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε ότι υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$, με

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha\,.$$

Παίρνοντας όρια και στα δύο μέλη του αναδρομικού τύπου

$$\alpha_{n+1} = \sqrt{3\alpha_n}$$

καταλήγουμε στο ότι $\alpha = 0$ ή $\alpha = 3$. Η περίπτωση $\alpha = 0$ απορρίπτεται αφού $\alpha_n \geq \alpha_1 = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα $\alpha = 3$.

Άσκηση 11 (Η ακολουθία του αριθμού e - Απαιτητική). Θεωρούμε την ακολουθία $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n, \;\; n \geq 1$.

(i) Δείξτε ότι

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{n} \cdot \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \quad \text{για κάθε } n \geq 1.$$

(ii) Δείξτε ότι $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$. **Υπόδειξη:** Χρησιμοποιείστε το (i) και την ανισότητα Bernoulli.

Λύση - υποδείξεις.
i) Έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \\
&= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\
&= \frac{n+1}{n} \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \\
&\qquad\qquad \text{(πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με το } (n+1)/n) \\
&= \frac{n+1}{n} \cdot \left(\frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \\
&= \frac{n+1}{n} \cdot \left[\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \\
&= \frac{n+1}{n} \cdot \left[\frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \\
&= \frac{n+1}{n} \cdot \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} .
\end{aligned}$$

(ii) Αφού $-\dfrac{1}{(n+1)^2} > -1$ έχουμε από την ανισότητα Bernoulli και το (i)

$$\begin{aligned}
\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{n+1}{n} \cdot \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \\
&\geq \frac{n+1}{n} \cdot \left[1 - (n+1) \cdot \frac{1}{(n+1)^2}\right] \\
&= \frac{n+1}{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = 1.
\end{aligned}$$

Άσκηση 12. Υπολογίστε τα όρια των πιο κάτω ακολουθιών:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n, \quad n \geq 1,$$

$$b_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n, \quad n \geq 1.$$

Υπόδειξη: Εκφράστε τις πιο πάνω ακολουθίες με τη βοήθεια της $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad n \geq 1.$

Λύση - υποδείξεις.
Υπολογίζουμε

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{1}{n+1}} = x_{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2}$$

και

$$b_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{1/2} = (x_{2n})^{1/2} = \sqrt{x_{2n}}$$

για κάθε $n \geq 1$.

Εφόσον $x_n \to e$ ισχύει $x_{n+1} \to e$ και $x_{2n} \to e$. Άρα

$$a_n = x_{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} \longrightarrow e \cdot 1 = e$$

και

$$b_n = \sqrt{x_{2n}} \longrightarrow \sqrt{e}.$$

Άσκηση 13 (Κατανόηση σύγκλισης στα $\pm\infty$). Δίνονται δύο ακολουθίες $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $a_n \to +\infty$ και $b_n \to -\infty$. Ποια από τα παρακάτω σύνολα περιέχουν σχεδόν όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και ποια σύνολα είναι πεπερασμένα;

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid 1234567890 < a_n\}$$
$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \leq 17\}$$
$$C = \{n \in \mathbb{N} \mid b_n > 1,1\}$$
$$D = \{n \in \mathbb{N} \mid b_n < -9876543210\}$$

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Λύση - υποδείξεις.
Το σύνολο A περιέχει σχεδόν όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Εξήγηση: αφού $a_n \to +\infty$ για τον θετικό αριθμό $M = 1234567890$ έχουμε $a_n > M$ σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Το σύνολο B είναι πεπερασμένο. Εξήγηση: αφού $a_n \to +\infty$ για τον θετικό αριθμό $M = 17$ θα έχουμε $a_n > M$ σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Επομένως υπάρχει $n_0 \geq 1$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $a_n > 17$. Επομένως αν $a_n \leq 17$ πρέπει να έχουμε $n < n_0$, δηλαδή $B \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid n < n_0\}$.

Το σύνολο C είναι πεπερασμένο. Εξήγηση: αφού $b_n \to -\infty$ για τον θετικό αριθμό $M = 12345$ θα έχουμε $b_n < -M$ σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Επομένως υπάρχει $n_0 \geq 1$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $b_n < -12345$. Επομένως αν $b_n > 1,1$ θα έχουμε ειδικότερα ότι $b_n \geq -12345$ και άρα $n < n_0$. Προκύπτει ότι $C \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid n < n_0\}$.

Το σύνολο D περιέχει σχεδόν όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Εξήγηση: αφού $b_n \to -\infty$ για τον θετικό αριθμό $M = 9876543210$ θα έχουμε $b_n < -M$ σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 14 (Σύγκλιση στα $\pm\infty$ με βάση τον ορισμό).

(i) Δείξτε με βάση τον ορισμό ότι η ακολουθία $a_n = -n^3$ συγκλίνει στο $-\infty$.

(ii) Αποδείξτε ότι κάθε φθίνουσα **όχι** κάτω φραγμένη ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $-\infty$.

Λύση - υποδείξεις.
(i) Έστω $M > 0$. Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $a_n < -M$. Από την Αρχιμήδεια Ιδιότητα υπάρχει $n_0 \geq 1$ με $n_0 > M$. Έστω $n \geq n_0$. Τότε

$$a_n = -n^3 \leq -n \leq -n_0 < -M.$$

(ii) Έστω $M > 0$. Εφόσον η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι κάτω φραγμένη, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $a_{n_0} < -M$. Έστω $n \geq n_0$. Τότε

$$a_n \leq a_{n_0} < -M,$$

όπου στην πρώτη ανισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα. Άρα $a_n \to -\infty$.