Μαθηματική Ανάλυση I

Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

4ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Άσκηση 1 (Υπολογισμός ορίου). Έστω a, b θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}\,.$$

Άσκηση 2 (Ακολουθία με μεταβαλλόμενο πλήθος προσθετέων). Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\Big)\,.$$

Άσκηση 3 (Ακολουθία με μεταβλητό πλήθος προσθετέων). Θεωρούμε την ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}\,.$$

Δείξτε ότι για κάθε $n \geq 1$ ισχύει:

(i) $x_{n+1} - x_n > 0$,

(ii) $x_n < 1$.

Τι συμπεραίνετε για την ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$; (Μην επιχειρήσετε να υπολογίσετε κάποιο όριο.)

Άσκηση 4 (Κριτήριο Ρίζας).

(i) (Απαιτητική) Έστω (α_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|} < 1\,.$$

Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0\,.$$

(ii) Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^n = 0\,.$$

Άσκηση 5 (Κριτήριο Λόγου).

(i) (Απαιτητική) Έστω $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία μη-μηδενικών αριθμών με

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| = \rho < 1\,.$$

Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0\,.$$

(ii) (Ένα πολύ σημαντικό όριο) Δείξτε ότι, για κάθε πραγματικό αριθμό x, ισχύει ότι

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0\,.$$

Άσκηση 6 (Εφαρμογή Κριτηρίων Λόγου - Ρίζας). Δείξτε ότι οι πιο κάτω ακολουθίες συγκλίνουν στο 0.

$$a_n = \frac{n^3}{3^n}, \quad n \geq 1,$$

$$b_n = \frac{2^n \cdot n!}{n^n}, \quad n \geq 1,$$

$$c_n = \left(\frac{3n^2 + n + 1}{7n^4 + 1}\right)^n \quad n \geq 1,$$

$$d_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \quad n \geq 1.$$

Υπόδειξη: Για τη δεύτερη και την τέταρτη ακολουθία θυμίζουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \in (2,3)$.

Άσκηση 7 (Υπολογισμός ορίου). Να υπολογίσετε τα όρια:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} n\lambda^n$, όπου $|\lambda| < 1$,

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

Άσκηση 8 (Αναδρομικά ορισμένη ακολουθία και σύγκλιση). Ορίζουμε την ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με αναδρομή ως εξής:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} \quad n \geq 1.$$

Δείξτε ότι:

(i) $0 < a_n < 2$ για κάθε $n \geq 1$,

(ii) $a_n < a_{n+1}$ για κάθε $n \geq 1$,

(iii) $a_n \to \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Υπόδειξη. Στα (i) και (ii) χρησιμοποιείστε την Αρχή της Επαγωγής.

Άσκηση 9 (Αναδρομικά ορισμένη ακολουθία και σύγκλιση). Ορίζουμε την ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με αναδρομή ως εξής:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 6 \cdot \frac{1 + a_n}{7 + a_n} \quad n \geq 1.$$

Δείξτε ότι

(i) $1 \leq a_n \leq 2$ για κάθε $n \geq 1$.

Υπόδειξη. Χρησιμοποιείστε την Αρχή της Επαγωγής. Μπορείτε να αναδιατυπώσετε τις ζητούμενες ανισότητες $1 \leq a_{n+1} \leq 2$ σε πιο απλές ισοδύναμες ανισότητες.

(ii) $a_{n+1} \geq a_n$ για κάθε $n \geq 1$.

(iii) $a_n \to 2$.

Άσκηση 10 (Αναδρομικά ορισμένη ακολουθία και σύγκλιση). Δίνεται η ακολουθία $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που ορίζεται με τον αναδρομικό τύπο

$$\alpha_1 = 1, \; \alpha_{n+1} = \sqrt{3\alpha_n}.$$

(i) Δείξτε, χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, ότι η $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι άνω φραγμένη από τον αριθμό 3.
(ii) Δείξτε ότι η $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα.
(iii) Εξηγήστε το λόγο για τον οποίο συγκλίνει η $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και στη συνέχεια υπολογίστε το όριο της.

Άσκηση 11 (Η ακολουθία του αριθμού e - Απαιτητική). Θεωρούμε την ακολουθία $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n, \;\; n \geq 1$.

(i) Δείξτε ότι

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{n} \cdot \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \quad \text{για κάθε } n \geq 1.$$

(ii) Δείξτε ότι $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$. **Υπόδειξη:** Χρησιμοποιείστε το (i) και την ανισότητα Bernoulli.

Άσκηση 12. Υπολογίστε τα όρια των πιο κάτω ακολουθιών:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n, \quad n \geq 1,$$

$$b_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n, \quad n \geq 1.$$

Υπόδειξη: Εκφράστε τις πιο πάνω ακολουθίες με τη βοήθεια της $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n, \quad n \geq 1$.

Άσκηση 13 (Κατανόηση σύγκλισης στα $\pm\infty$). Δίνονται δύο ακολουθίες $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $a_n \to +\infty$ και $b_n \to -\infty$. Ποια από τα παρακάτω σύνολα περιέχουν σχεδόν όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και ποια σύνολα είναι πεπερασμένα;

$$\begin{aligned} A &= \{n \in \mathbb{N} \mid 1234567890 < a_n\} \\ B &= \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \leq 17\} \\ C &= \{n \in \mathbb{N} \mid b_n > 1,1\} \\ D &= \{n \in \mathbb{N} \mid b_n < -9876543210\} \end{aligned}$$

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Άσκηση 14 (Σύγκλιση στα $\pm\infty$ με βάση τον ορισμό).

(i) Δείξτε με βάση τον ορισμό ότι η ακολουθία $a_n = -n^3$ συγκλίνει στο $-\infty$.

(ii) Αποδείξτε ότι κάθε φθίνουσα **όχι** κάτω φραγμένη ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $-\infty$.