Μαθηματική Ανάλυση Ι

Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

3ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Άσκηση 1 (Κατανόηση σύγκλισης). Δίνεται μια ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που συγκλίνει στον αριθμό 1. Ποια από τα παρακάτω σύνολα περιέχουν τελικά όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και ποια σύνολα είναι πεπερασμένα;

$$\begin{aligned} A &= \{n \in \mathbb{N} \mid 0,99 < a_n < 1,01\} \\ B &= \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \leq 0,999\} \\ C &= \{n \in \mathbb{N} \mid a_n > 1,1\} \\ D &= \{n \in \mathbb{N} \mid 0,9999 < a_n\} \end{aligned}$$

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Λύση - υποδείξεις.

Το σύνολο A περιέχει τελικά όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Για να το δούμε παίρνουμε $\varepsilon = 0,01 > 0$, εφόσον $a_n \to 1$ έχουμε ότι $a_n \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) = (0,99, 1,01)$ τελικά για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Το σύνολο B είναι πεπερασμένο. Για $\varepsilon = 0,001 > 0$ υπάρχει n_0 έτσι ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $a_n \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) = (0,999, 1,001)$. Ειδικότερα έχουμε $a_n > 0,999$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως αν $a_n \leq 0,999$ τότε $n < n_0$. Δηλαδή $B \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid n < n_0\}$.

Το σύνολο C είναι επίσης πεπερασμένο. Παίρνουμε $\varepsilon = 0,1 > 0$. Τότε υπάρχει n_0 έτσι ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $a_n \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) = (0,9, 1,1)$. Ειδικότερα έχουμε $a_n < 1,1$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως αν $a_n > 1,1$ τότε $n < n_0$. Δηλαδή $C \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid n < n_0\}$.

Το σύνολο D περιέχει τελικά όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Για $\varepsilon = 0,0001 > 0$ υπάρχει n_0 έτσι ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $a_n \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$. Ειδικότερα έχουμε $a_n > 1-\varepsilon = 0,9999$ για κάθε $n \geq n_0$.

Άσκηση 2 (Επαλήθευση σύγκλισης με βάση τον ορισμό). Δείξτε με βάση τον ορισμό ότι η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$ συκλίνει στο 0.

Λύση - υποδείξεις.

Δείχνουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \geq 1$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $|a_n - 0| < \varepsilon$.

Έστω $\varepsilon > 0$.

[*Πρόχειρο:* Θέλουμε $|a_n - 0| = \dfrac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$. Αν $n \geq n_0$ τότε $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n_0}}$ επομένως αρκεί να έχουμε $\dfrac{1}{\sqrt{n_0}} < \varepsilon$. Ισοδύναμα $\sqrt{n_0} > 1/\varepsilon$ ή αλλιώς $n_0 > 1/\varepsilon^2$.]

Από την Αρχιμήδεια Ιδιότητα υπάρχει φυσικός αριθμός $n_0 \geq 1$ με $n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon^2}$.

Έστω $n \geq n_0$.

Τότε

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{\sqrt{n}} - 0\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n_0}} < \varepsilon.$$

Άσκηση 3 (Σωστό - Λάθος με αιτιολόγηση). Θεωρούμε δύο ακολουθίες $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ and $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ πραγματικών αριθμών. Ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις είναι αληθείς και ποιες ψευδείς; Αν μια πρόταση είναι αληθής δώστε απόδειξη, αλλιώς δώστε ένα παράδειγμα όπου η πρόταση δεν ισχύει.

(i) Αν η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη τότε $a_n \cdot \dfrac{1}{n} \to 0$.

(ii) Αν η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη και η $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα τότε η $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι επίσης συγκλίνουσα.

(iii) Αν οι $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αποκλίνουσες τότε και η $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αποκλίνουσα.

(iv) Αν οι $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσες τότε και η $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα.

Λύση - υποδείξεις.

(i) Η πρόταση είναι αληθής. Εφόσον η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη υπάρχει $M > 0$ έτσι ώστε $|a_n| \le M$, δηλαδή $-M \le a_n \le M$ για όλα τα $n \ge 1$. Επομένως

$$-\frac{M}{n} \le \frac{a_n}{n} \le \frac{M}{n}$$

Αφού $\dfrac{M}{n} \to 0$ και $-\dfrac{M}{n} \to 0$ από το Κριτήριο Παρεμβολής ισχύει $\dfrac{a_n}{n} \to 0$.

(ii) Η πρόταση είναι ψευδής. Παίρνουμε $a_n = (-1)^n$ and $b_n = 1$, $n \ge 1$. Τότε $|a_n| \le 1$ για κάθε $n \ge 1$ και άρα η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη. Προφανώς η ακολουθία $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο 1. Από την άλλη $a_n \cdot b_n = a_n = (-1)^n$ για κάθε $n \ge 1$ και όπως δείξαμε αυτή δεν είναι συγκλίνουσα ακολουθία.

(iii) Η πρόταση είναι ψευδής. Παίρνουμε $a_n = (-1)^n$ και $b_n = (-1)^{n+1}$, $n \ge 1$. Παρατηρούμε ότι $b_n = (-1)\cdot(-1)^n = (-1)\cdot a_n = -a_n$ και άρα $a_n + b_n = 0$ για κάθε $n \ge 1$. (Αλλιώς μπορούμε να πούμε ότι $a_n = 1$ και $b_n = -1$ για n: άρτιος, όπως επίσης $a_n = -1$ και $b_n = 1$ για n: περιττός. Επομένως σε κάθε περίπτωση έχουμε $a_n + b_n = 0$.)

Αφού $a_n + b_n = 0$ για κάθε $n \ge 1$ είναι σαφές ότι η ακολουθία $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο 0. Από την άλλη οι ακολουθίες $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αποκλίνουσες. Αυτό το έχουμε δείξει στο μάθημα για την $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Με όμοιο τρόπο μπορεί να δειχθεί ότι και η $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αποκλίνουσα. Αλλιώς: αν είχαμε $b_n \to b$ τότε και $-b_n \to -b$ δηλαδή $a_n \to -b$ (αφού $a_n + b_n = 0$), οπότε και η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ θα ήταν συγκλίνουσα που είναι άτοπο.

(iv) Η πρόταση είναι αληθής. Προφανώς $b_n = a_n + b_n + (-a_n)$ για κάθε $n \ge 1$. Από την υπόθεσή μας $a_n \to a$ και $a_n + b_n \to c$ για κάποια $a, c \in \mathbb{R}$. Επομένως

$$b_n = a_n + b_n - a_n \to c - a.$$

Άρα η ακολουθία $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα.

Άσκηση 4 (Όριο και Μηδέν).

(i) Να δείξετε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} (\alpha_n - \alpha) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |\alpha_n - \alpha| = 0\,.$$

(ii) Να δείξετε

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |\alpha_n| = 0.$$

Ισχύει το πιο πάνω αν αντικαταστήσουμε το 0 με ένα $\alpha \neq 0$;

Λύση - υποδείξεις.

Το (i) προκύπτει άμεσα από τον ορισμό του ορίου ακολουθίας δεδομένου ότι

$$|\alpha_n - \alpha| = |(\alpha_n - \alpha) - 0| = ||\alpha_n - \alpha| - 0|.$$

Το (ii) προκύπτει επίσης άμεσα από τον ορισμό γιατί $|\alpha_n - 0| = ||\alpha_n| - 0|$.

Το συμπέρασμα δεν ισχύει αν αντικαταστήσουμε το 0 με ένα $\alpha \neq 0$. Δίνουμε ένα αντιπαράδειγμα: παίρνουμε $\alpha_n = (-1)^n$, $n \ge 1$ και $\alpha = 1$. Τότε $|\alpha_n| = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε

$\lim_{n\to\infty}|\alpha_n| = \alpha$. Από την άλλη, όπως γνωρίζουμε η $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι συγκλίνουσα, και ειδικότερα δεν συγκλίνει στο $1 = \alpha$.

Άσκηση 5 (Άθροισμα ορίων). Αν $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ και $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, να δείξετε ότι $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$.

Λύση - υποδείξεις.
Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε αφού $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ και $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ υπάρχουν $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ και $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$, για κάθε $n \geq n_1$ και κάθε $n \geq n_2$ αντίστοιχα. Οπότε αν θέσουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ έχουμε ότι για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει

$$|a_n + b_n - a - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Συνεπώς $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$.

Άσκηση 6 (Φθίνουσα κάτω φραγμένη ακολουθία και σύγκλιση). Με χρήση της πρότασης ότι κάθε αύξουσα άνω φραγμένη ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει σε κάποιο $a \in \mathbb{R}$ να δειχθεί ότι κάθε φθίνουσα κάτω φραγμένη ακολουθία $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει σε κάποιο $b \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη: Θεωρήστε την ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $a_n = -b_n$ για κάθε $n \geq 1$.

Λύση - υποδείξεις.
Η ακολουθία $a_n = -b_n$, $n \geq 1$ είναι αύξουσα γιατί για κάθε $n \geq 1$ έχουμε

$$b_n \geq b_{n+1} \iff -a_n \geq -a_{n+1} \iff a_{n+1} \geq a_n.$$

Επιπλεόν επειδή η $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι κάτω φραγμένη υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ με $b_n \geq M$ για κάθε $n \geq 1$. Επομένως

$$-a_n \geq M \iff a_n \leq -M$$

για κάθε $n \geq 1$ και άρα η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι άνω φραγμένη. Από την πρόταση στην εκφώνηση έχουμε ότι η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει σε κάποιον αριθμό a. Άρα

$$b_n = -a_n \to -a$$

και η $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $b = -a \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 7 (Πυκνότητα ρητών και σύγκλιση). Να δείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό υπάρχει ακολουθία ρητών αριθμών που συγκλίνει σε αυτόν. (Υποδειξη: να χρησιμοποιήσετε την πυκνότητα του συνόλου των ρητών αριθμών)

Λύση - υποδείξεις.
Έστω $x \in \mathbb{R}$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, από την πυκνότητα των ρητών στο $\mathbb{R}$, υπάρχει $x_n \in \mathbb{Q}$ τέτοιο ώστε $x - \frac{1}{n} < x_n < x + \frac{1}{n}$. Οπότε $|x_n - x| < \frac{1}{n}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ απ' όπου προκύπτει ότι $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Άσκηση 8 (Εφαρμογή ορισμού ορίου). Έστω ότι $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $a_n > 0$.

Λύση - υποδείξεις.
Εφαρμόζουμε τον ορισμό του ορίου ακολουθίας για $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό έτσι ώστε $a - \varepsilon > 0$ (π.χ. $\varepsilon = a/2$) και έχουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει

$$\alpha - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

ειδικότερα $a_n > a - \varepsilon > 0$.

Άσκηση 9 (Εφαρμογή ορισμού ορίου). Να δείξετε ότι αν $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^2} = 1$, τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $a_n > \dfrac{n^2}{3}$.

Λύση - υποδείξεις.

Εφαρμόστε τον ορισμό του ορίου ακολουθίας για $\varepsilon = \frac{2}{3} > 0$ έτσι που $\frac{a_n}{n^2} > 1 - \varepsilon = \frac{1}{3}$ τελικά για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 10 (Εφαρμογή ορισμού ορίου). Έστω $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία μη αρνητικών αριθμών και υποθέτουμε ότι $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha > 0$. Να δείξετε ότι $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha_n} = 1$.

Λύση - υποδείξεις.

Θέτοντας $\varepsilon = \frac{\alpha}{2} > 0$ στον ορισμό του ορίου ακολουθίας έχουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει

$$\frac{\alpha}{2} < \alpha_n < \frac{3\alpha}{2}.$$

Παίρνοντας $n-$οστές ρίζες έχουμε για κάθε $n \geq n_0$ ότι

$$\sqrt[n]{\frac{\alpha}{2}} < \sqrt[n]{\alpha_n} < \sqrt[n]{\frac{3\alpha}{2}}.$$

Εφόσον $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\alpha}{2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3\alpha}{2}} = 1$ προκύπτει από τα πιο πάνω και από το Κριτήριο Παρεμβολής ότι $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha_n} = 0$.

Άσκηση 11 (Όριο ρητών παραστάσεων).

(i) Δείξτε ότι $\quad \frac{1}{2n^2 - 1} \to 0$. (Χωρίς τη χρήση του ορισμού.)

(ii) Υπολογίστε το όριο $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - 2n + 1}{5n^3 + n^2 + 1}$.

(iii) (Γενίκευση των προηγουμένων) Δίνονται δύο πολυώνυμα

$$p(x) = a_k x^k + \cdots + a_0 \quad \text{και} \quad q(x) = b_m x^m + \cdots + b_0$$

με $a_k, b_m \neq 0$, $m \geq k$ και $m \geq 1$.

Αν $k = m$ δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{q(n)} = \frac{a_k}{b_m}$$

και αν $k < m$ δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{q(n)} = 0.$$

Υπόδειξη: Διαιρέστε κάθε φορά τους αριθμητή-παρονομαστή με τη μεγαλύτερη δύναμη του n.

Λύση - υποδείξεις.

(i) Διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με το n^2 και έχουμε

$$\frac{1}{2n^2 - 1} = \frac{\frac{1}{n^2}}{2 - \frac{1}{n^2}} \to \frac{0}{2 - 0} = \frac{0}{2} = 0.$$

(ii) Διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με το n^3 και έχουμε

$$\frac{n^3 - 2n + 1}{5n^3 + n^2 + 1} = \frac{1 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{5 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}} \to \frac{1 - 2 \cdot 0 + 0}{5 + 0 + 0} = \frac{1}{5}.$$

(iii) Θεωρούμε τα πολυώνυμα $p(x) = a_k x^k + \cdots + a_0$ και $q(x) = b_m x^m + \cdots + b_0$ με $a_k, b_m \neq 0$. Διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με το n^m και έχουμε

$$\frac{p(n)}{q(n)} = \frac{\dfrac{a_k}{n^{m-k}} + \cdots + \dfrac{a_0}{n^m}}{b_m + \cdots + \dfrac{b_0}{n^m}} .$$

Είναι σαφές ότι ο παρονομαστής συγκλίνει στον αριθμό

$$b_m + \cdots + b_0 \cdot 0 = b_m.$$

Αν $k = m$ τότε στον αριθμητή του προηγούμενου κλάσματος έχουμε $n^{m-k} = 1$ και όλοι οι άλλοι εκθέτες του n είναι θετικοί. Επομένως ο αριθμητής του κλάσματος συγκλίνει στον αριθμό

$$a_k + \cdots + a_0 \cdot 0 = a_k,$$

Άρα $\dfrac{p(n)}{q(n)} \to \dfrac{a_k}{b_m}$.

Αν $k < m$ τότε $n^{m-k} \geq n$ και άρα όλοι οι εκθέτες του n στον αριθμητή του πιο πάνω κλάσματος είναι θετικοί. Προκύπτει ότι ο αριθμητής συγκλίνει στον αριθμό

$$a_k \cdot 0 + \cdots + a_0 \cdot 0 = 0.$$

Συνεπώς $\dfrac{p(n)}{q(n)} \to \dfrac{0}{b_m} = 0$.

Άσκηση 12 (Υπολογισμός ορίου). Υπολογίστε τα όρια των πιο κάτω ακολουθιών:

(i) $a_n = \left(-\dfrac{7}{8}\right)^n + \sqrt[n]{n}, \quad n \geq 1.$

(ii) $b_n = \dfrac{(-1)^n}{n}, \quad n \geq 1.$

(iii) $c_n = \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}, \quad n \geq 1.$

Υπόδειξη: Θεωρήστε τη συζυγή παράσταση.

(iv) $d_n = \dfrac{n^2 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 1}{n^3 - \sqrt[n]{n} + 1}, \quad n \geq 1.$

(v) $e_n = \sqrt[2n]{2n}, \quad n \geq 1.$

Υπόδειξη: Τι σχέση έχει η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με την $x_n = \sqrt[n]{n}$, $n \geq 1$;

(vi) $f_n = \sqrt[2n]{n}, \quad n \geq 1.$

Λύση - υποδείξεις.

(i) Αφού $\left|-\dfrac{7}{8}\right| < 1$ έχουμε $\left(-\dfrac{7}{8}\right)^n \to 0$. Γνωρίζουμε επίσης ότι $\sqrt[n]{n} \to 1$. Συνεπώς

$$a_n = \left(-\frac{7}{8}\right)^n + \sqrt[n]{n} \to 0 + 1 = 1.$$

(ii) Προφανώς $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ και άρα

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}, \quad \text{για κάθε } n \geq 1.$$

Αφού $\dfrac{1}{n} \to 0$ και $-\dfrac{1}{n} \to 0$ έχουμε από το Κριτήριο Παρεμβολής $\dfrac{(-1)^n}{n} \to 0$.

(iii) Πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με τη συζυγή παράσταση $\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+1}$ και έχουμε

$$\begin{aligned}
c_n &= \sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}\\
&= \frac{(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1})\cdot(\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+1})}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+1}}\\
&= \frac{(n^2+2)-(n^2+1)}{(\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+1})}\\
&= \frac{1}{(\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+1})}\\
&\leq \frac{1}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}} \quad (\text{γιατί } n^2\leq n^2+1\leq n^2+2)\\
&= \frac{1}{n+n}\\
&= \frac{1}{2n}
\end{aligned}$$

Αφού $n^2+1\leq n^2+2$ έχουμε $c_n\geq 0$ και άρα

$$0\leq c_n\leq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n} \quad \text{για κάθε } n\geq 1.$$

Από το Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε $c_n\to 0$.

(iv) Διαιρούμε αριθμητή-παρονομαστή με το n^3 και έχουμε

$$d_n=\frac{n^2+\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}{n^3-\sqrt[n]{n}+1}=\frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{n^3}}{1-\frac{1}{n^3}\cdot\sqrt[n]{n}+\frac{1}{n^3}}\longrightarrow\frac{0+0\cdot 0+0}{1-0\cdot 1+0}=\frac{0}{1}=0.$$

(v) Θέτουμε $x_n=\sqrt[n]{n}$, $n\geq 1$. Παρατηρούμε ότι $e_n=\sqrt[2n]{2n}=x_{2n}$. Γνωρίζουμε ότι $x_n\to 1$ και επομένως $x_{2n}\to 1$. Άρα $\sqrt[2n]{2n}\to 1$.

(vii) Θέτουμε όπως και πριν $x_n=\sqrt[n]{n}$, $n\geq 1$. Παρατηρούμε ότι

$$\sqrt[2n]{n}=n^{\frac{1}{2n}}=\left(n^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\sqrt[n]{n}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x_n}.$$

Αφού $x_n\to 1$ έχουμε $\sqrt{x_n}\to 1$, δηλαδή $\sqrt[2n]{n}\to 1$.

Άσκηση 13 (Διερεύνηση σύγκλισης). Θεωρούμε την ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που ορίζεται ως εξής:

$$a_n=\frac{1+(-1)^n n^2}{2+3n+n^2} \quad n\geq 1.$$

Εξετάστε τις ακολουθίες $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ και $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ως προς τη σύγκλιση. (Δηλαδή είτε βρείτε το όριο είτε δείξτε ότι δεν συγκλίνουν.)

Υπόδειξη: Συγκλίνουν μόνο δύο από τις προηγούμενες ακολουθίες.

Λύση - υποδείξεις.

Έχουμε

$$a_{2n}=\frac{1+1\cdot(2n)^2}{2+3\cdot(2n)+(2n)^2}=\frac{4n^2+1}{4n^2+6n+2}=\frac{4+\frac{1}{n^2}}{4+\frac{6}{n}+\frac{2}{n^2}}\longrightarrow\frac{4+0}{4+0+0}=1.$$

Επιπλέον

$$\begin{aligned}
a_{2n+1} &= \frac{1-1\cdot(2n+1)^2}{2+3\cdot(2n+1)+(2n+1)^2} \\
&= \frac{1-4n^2-4n-1}{2+6n+3+4n^2+4n+1} \\
&= \frac{-4n^2-4n}{4n^2+10n+6} \\
&= \frac{-4-\dfrac{4}{n}}{4+\dfrac{10}{n}+\dfrac{6}{n^2}} \\
&\longrightarrow \frac{-4-0}{4+0+0} = \frac{-4}{4} = -1.
\end{aligned}$$

Τέλος δείχνουμε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει. Αν συνέκλινε τότε θα είχαμε $a_{2n+1} - a_{2n} \to 0$. Από την άλλη όμως $a_{2n+1} - a_{2n} \to -1-1 = -2$, το οποίο είναι άτοπο (μοναδικότητα ορίου).