Μαθηματική Ανάλυση Ι

Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

3ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Άσκηση 1 (Κατανόηση σύγκλισης). Δίνεται μια ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που συγκλίνει στον αριθμό 1. Ποια από τα παρακάτω σύνολα περιέχουν τελικά όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και ποια σύνολα είναι πεπερασμένα;

$$
\begin{aligned}
A &= \{n \in \mathbb{N} \mid 0,99 < a_n < 1,01\} \\
B &= \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \leq 0,999\} \\
C &= \{n \in \mathbb{N} \mid a_n > 1,1\} \\
D &= \{n \in \mathbb{N} \mid 0,9999 < a_n\}
\end{aligned}
$$

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Άσκηση 2 (Επαλήθευση σύγκλισης με βάση τον ορισμό). Δείξτε με βάση τον ορισμό ότι η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$ συκλίνει στο 0.

Άσκηση 3 (Σωστό - Λάθος με αιτιολόγηση). Θεωρούμε δύο ακολουθίες $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ and $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ πραγματικών αριθμών. Ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις είναι αληθείς και ποιες ψευδείς; Αν μια πρόταση είναι αληθής δώστε απόδειξη, αλλιώς δώστε ένα παράδειγμα όπου η πρόταση δεν ισχύει.

(i) Αν η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη τότε $a_n \cdot \dfrac{1}{n} \to 0$.

(ii) Αν η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη και η $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα τότε η $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι επίσης συγκλίνουσα.

(iii) Αν οι $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αποκλίνουσες τότε και η $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αποκλίνουσα.

(iv) Αν οι $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσες τότε και η $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα.

Άσκηση 4 (Όριο και Μηδέν).

(i) Να δείξετε ότι
$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} (\alpha_n - \alpha) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |\alpha_n - \alpha| = 0\,.$$

(ii) Να δείξετε
$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |\alpha_n| = 0.$$
Ισχύει το πιο πάνω αν αντικαταστήσουμε το 0 με ένα $\alpha \neq 0$;

Άσκηση 5 (Άθροισμα ορίων). Αν $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ και $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, να δείξετε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$.

Άσκηση 6 (Φθίνουσα κάτω φραγμένη ακολουθία και σύγκλιση). Με χρήση της πρότασης ότι κάθε αύξουσα άνω φραγμένη ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει σε κάποιο $a \in \mathbb{R}$ να δειχθεί ότι κάθε φθίνουσα κάτω φραγμένη ακολουθία $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει σε κάποιο $b \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη: Θεωρήστε την ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $a_n = -b_n$ για κάθε $n \geq 1$.

Άσκηση 7 (Πυκνότητα ρητών και σύγκλιση). Να δείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό υπάρχει ακολουθία ρητών αριθμών που συγκλίνει σε αυτόν. (Υποδειξη: να χρησιμοποιήσετε την πυκνότητα του συνόλου των ρητών αριθμών)

Άσκηση 8 (Εφαρμογή ορισμού ορίου). Έστω ότι $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $a_n > 0$.

Άσκηση 9 (Εφαρμογή ορισμού ορίου). Να δείξετε ότι αν $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n^2} = 1$, τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $a_n > \dfrac{n^2}{3}$.

Άσκηση 10 (Εφαρμογή ορισμού ορίου). Έστω $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία μη αρνητικών αριθμών και υποθέτουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha > 0$. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha_n} = 1$.

Άσκηση 11 (Όριο ρητών παραστάσεων).

(i) Δείξτε ότι $\dfrac{1}{2n^2-1} \to 0$. (Χωρίς τη χρήση του ορισμού.)

(ii) Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3-2n+1}{5n^3+n^2+1}$.

(iii) (Γενίκευση των προηγουμένων) Δίνονται δύο πολυώνυμα

$$p(x) = a_k x^k + \cdots + a_0 \quad \text{και} \quad q(x) = b_m x^m + \cdots + b_0$$

με $a_k, b_m \neq 0$, $m \geq k$ και $m \geq 1$.

Αν $k = m$ δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{q(n)} = \frac{a_k}{b_m}$$

και αν $k < m$ δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{q(n)} = 0.$$

Υπόδειξη: Διαιρέστε κάθε φορά τους αριθμητή-παρονομαστή με τη μεγαλύτερη δύναμη του n.

Άσκηση 12 (Υπολογισμός ορίου). Υπολογίστε τα όρια των πιο κάτω ακολουθιών:

(i) $a_n = \left(-\dfrac{7}{8}\right)^n + \sqrt[n]{n}, \quad n \geq 1.$

(ii) $b_n = \dfrac{(-1)^n}{n}, \quad n \geq 1.$

(iii) $c_n = \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}, \quad n \geq 1.$

Υπόδειξη: Θεωρήστε τη συζυγή παράσταση.

(iv) $d_n = \dfrac{n^2 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 1}{n^3 - \sqrt[n]{n} + 1}, \quad n \geq 1.$

(v) $e_n = \sqrt[2n]{2n}, \quad n \geq 1.$

Υπόδειξη: Τι σχέση έχει η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με την $x_n = \sqrt[n]{n}$, $n \geq 1$;

(vi) $f_n = \sqrt[2n]{n}, \quad n \geq 1.$

Άσκηση 13 (Διερεύνηση σύγκλισης). Θεωρούμε την ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που ορίζεται ως εξής:

$$a_n = \frac{1 + (-1)^n n^2}{2 + 3n + n^2} \quad n \geq 1.$$

Εξετάστε τις ακολουθίες $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ και $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ως προς τη σύγκλιση. (Δηλαδή είτε βρείτε το όριο είτε δείξτε ότι δεν συγκλίνουν.)

Υπόδειξη: Συγκλίνουν μόνο δύο από τις προηγούμενες ακολουθίες.