Μαθηματική Ανάλυση Ι

Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

2ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Άσκηση 1 (Χρήση του συμβολισμού Σ). Συμπληρώστε τα πιο κάτω κενά.

$$\begin{aligned}
17 \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{\dots}^{\dots} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \\
\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k &= \sum_{\dots}^{\dots} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \\
\sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{j=0}^{\dots} a_{\dots} \\
\left(\sum_{k=1}^{n} x^k\right) + x^{n+1} &= \sum_{k=1}^{\dots} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \\
(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad \text{όπου } a,b \neq 0 \text{ και } n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Λύση - υποδείξεις.

$$\begin{aligned}
17 \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k &= 17 \cdot (a_1 + \cdots + a_n) = 17 \cdot a_1 + \cdots + 17 \cdot a_n = \sum_{k=1}^{n} \; 17 \cdot a_k \\
\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k &= (a_1 + \cdots + a_n) + (b_1 + \cdots + b_n) = \; (a_1 + b_1) + \cdots + (a_n + b_n) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) \\
\sum_{k=1}^{n} a_k &= a_1 + \cdots + a_n = \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1} \\
\left(\sum_{k=1}^{n} x^k\right) + x^{n+1} &= (x + x^2 + \dots x^n) + x^{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} x^k \\
(a+b)^n &= \binom{n}{0} \cdot a^n \cdot b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \cdots + \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k + \cdots + \binom{n}{n} \cdot a^0 \cdot b^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \; \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k \qquad \text{(Διώνυμο Νεύτωνα).}
\end{aligned}$$

Σχόλιο: Είναι επίσης σωστό ότι $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}$, απλά τότε ο πρώτος όρος θα είναι ο $\binom{n}{0} \cdot a^0 \cdot b^n$.

Άσκηση 2. Να αποδείξετε ότι για κάθε φυσικούς αριθμούς $0 \le k \le n$ ισχύει

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n .$$

Λύση - υποδείξεις.
Εφαρμόστε το διωνυμικό ανάπτυγμα για $a = b = 1$.

Άσκηση 3 (Διωνυμικό Ανάπτυγμα).

(i) Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και κάθε $n \ge 1$ έχουμε

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1} \cdot x + \cdots + \binom{n}{n-1} \cdot x^{n-1} + x^n$$

(ii) Υπολογίστε τον αριθμό

$$a = 1 + \binom{5}{1} \cdot (-2) + \binom{5}{2} \cdot (-2)^2 + \cdots + \binom{5}{4} \cdot (-2)^4 + (-2)^5.$$

(iii) Δείξτε ότι για κάθε $x > -1$ ισχύει

$$1 + \binom{7}{1} \cdot x + \binom{7}{2} \cdot x^2 + \cdots + \binom{7}{6} \cdot x^6 + x^7 \ge 7x + 1.$$

Υπόδειξη για το (iii). Χρησιμοποιήστε την ανισότητα Bernoulli.

Λύση - υποδείξεις.
(i) Εφαρμόζουμε το διωνυμικό ανάπτυγμα

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

για $a = 1$ και $b = x$. Παρατηρούμε ότι $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

(ii) Εφαρμόζουμε το (i) για $x = -2$, $n = 5$ και έχουμε ότι

$$a = (1 + (-2))^5 = (-1)^5 = -1.$$

(iii) Εφαρμόζουμε το (i) για $n = 7$ και έχουμε ότι το αριστερό μέρος της ανισότητας είναι ίσο με $(1+x)^7$ το οποίο από την ανισότητα Bernoulli είναι μεγαλύτερο ή ίσο από $1 + 7x$, αφού $x > -1$.

Άσκηση 4 (Τρίγωνο του Pascal). Να δείξετε ότι για κάθε θετικούς ακέραιους αριθμούς k, n με $k \le n$ ισχύει

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k} .$$

Λύση - υποδείξεις.
Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}+\frac{n!}{k!(n-k)!}\\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\cdot\frac{1}{(n-k+1)}+\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\cdot\frac{1}{k}\\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\cdot\left(\frac{1}{n-k+1}+\frac{1}{k}\right)\\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\cdot\frac{n+1}{k(n-k+1)}\\ &= \binom{n+1}{k}.\end{aligned}$$

Άσκηση 5. Να δείξετε ότι αν $a, b \in \mathbb{R}$ με $a \notin \mathbb{Q}$ και $0 \neq b \in \mathbb{Q}$, τότε ab και $a+b \notin \mathbb{Q}$. Είναι αλήθεια ότι αν $a, b \notin \mathbb{Q}$, τότε τουλάχιστον ένα από τα ab και $a+b$ δεν ανήκει στο $\mathbb{Q}$;

Λύση - υποδείξεις.
Αν $ab = q \in \mathbb{Q}$, τότε αφού $b \neq 0$ θα έχουμε ότι $a = b^{-1}q \in \mathbb{Q}$ το οποίο είναι άτοπο. Αντίστοιχα αποδεικνύεται και το ότι $a+b \notin \mathbb{Q}$.

Η απάντηση στο ερώτημα είναι αρνητική αφού αν πάρουμε $a = \sqrt{2}$ και $b = -\sqrt{2}$, τότε $ab = -2$ και $a+b = 0$.

Άσκηση 6. Δείξτε ότι δεν υπάρχει ρητός αριθμός q, τέτοιος ώστε $q^2 = 3$.

Λύση - υποδείξεις.
Έστω ότι υπάρχουν φυσικοί αριθμοί $m\,,n$ (μπορούμε να υποθέσουμε ότι δεν έχουν κοινό παράγοντα) τέτοιοι ώστε

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 3.$$

Τότε $m^2 = 3n^2$, δηλαδή ο m^2 είναι πολλαπλάσιο του 3. Ισχυριζόμαστε ότι τότε και ο m είναι πολλαπλάσιο του 3. Πράγματι αν κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει ο m θα είναι της μορφής $3k+1$ ή $3k+2$. Τότε όμως $(3k+1)^2 = 3(3k^2+2k)+1$ και $(3k+2)^2 = 3(3k^2+4k+1)+1$. Δηλαδή ο m^2 δεν είναι πολλαπλάσιο του 3. Άτοπο.

Επομένως $m = 3k$ για κάποιον φυσικό k, και άρα $m^2 = 9k^2$. Τότε $3n^2 = 9k^2$, δηλαδή $n^2 = 3k^2$. Από αυτό προκύπτει ότι ο n^2 και –σύμφωνα με τα προηγούμενα– και ο n θα είναι πολλαπλάσια του 3. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού έχουμε υποθέσει ότι οι $m\,,n$ δεν έχουν κοινό παράγοντα.

Άσκηση 7. Δείξτε ότι οι αριθμοί $\sqrt{6}$ και $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ δεν είναι ρητοί.

Λύση - υποδείξεις.
Έστω ότι υπάρχουν φυσικοί αριθμοί $m\,,n$ (μπορούμε να υποθέσουμε ότι δεν έχουν κοινό παράγοντα) τέτοιοι ώστε

$$\frac{m}{n} = \sqrt{6}\,.$$

Τότε $m^2 = 6n^2$, δηλαδή ο m^2 είναι πολλαπλάσιο του 2 και του 3. Τότε και ο m είναι πολλαπλάσιο του 2 και του 3 (βλ. προηγούμενη άσκηση). Άρα $m = 6k$ για κάποιον φυσικό k και επομένως $m^2 = 36k^2$. Προκύπτει ότι $n^2 = 6k^2$ και άρα ο n^2 είναι πολλαπλάσιο του 2 και του 3. Τότε και ο n θα είναι πολλαπλάσια του 2 και του 3, δηλαδή πολλαπλάσιο του 6. Αυτό είναι άτοπο αφού έχουμε υποθέσει ότι οι $m\,,n$ δεν έχουν κοινό παράγοντα.

Αν υποθέσουμε ότι ο $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ είναι ρητός, τότε και το τετράγωνο του $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = 5+2\sqrt{6}$ θα είναι επίσης ρητός, δηλαδή $5+2\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$. Επομένως $2\sqrt{6} = (5+2\sqrt{6})-5 \in \mathbb{Q}$ και $\sqrt{6} = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$, άτοπο.

Άσκηση 8 (Απαιτητική). Αποδείξτε την Αρχή του Ελαχίστου με τη βοήθεια της Αρχής της Επαγωγής.

Υπόδειξη. Θεωρήστε ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{N}$ που δεν έχει minimum και εφαρμόστε την Αρχή της Επαγωγής παίρνοντας για ιδιότητα P το εξής:

το $n \in \mathbb{N}$ έχει την ιδιότητα P αν για κάθε φυσικό $k \leq n$ έχουμε $k \notin A$.

Συμπεράνετε ότι ένα $A \subseteq \mathbb{N}$ που δεν έχει minimum πρέπει να είναι το κενό σύνολο.

Λύση - υποδείξεις.
Θεωρούμε ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{N}$ που δεν έχει minimum και δείχνουμε με επαγωγή ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει το εξής: για κάθε φυσικό $k \leq n$ έχουμε $k \notin A$.

Για $n = 1$: θεωρούμε έναν φυσικό $k \leq 1$, τότε $k = 1$. Αν είχαμε $k \in A$, δηλαδή $1 \in A$, τότε 1 θα ήταν το minimum του $A \subseteq \mathbb{N}$, ενάντια στην υπόθεσή μας. Άρα $k \notin A$.

Υποθέτουμε ότι για κάποιο n ισχύει το εξής: για κάθε φυσικό $k \leq n$ έχουμε $k \notin A$. (Επαγωγική Υπόθεση)

Δείχνουμε ότι ισχύει η ίδια ιδιότητα για το $n+1$, δηλαδή ότι για κάθε $k \leq n+1$ ισχύει $k \notin A$.

Αν $k \leq n$ τότε $k \notin A$ από την Επαγωγική Υπόθεση. Επομένως θεωρούμε $k = n+1$. Αν είχαμε $k \in A$ δηλαδή $n+1 \in A$, αφού $k' \notin A$ για κάθε $k' \leq n$ τότε το $n+1$ θα ήταν το minimum του A, άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι το A δεν έχει minimum. Άρα $k \notin A$ για κάθε $k \leq n+1$.

Από την Αρχή της Επαγωγής για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει: για κάθε $k \leq n$ έχουμε $k \notin A$, ειδικότερα για $k = n$ έχουμε $n \notin A$. Επομένως για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $n \notin A$, ισοδύναμα $A = \emptyset$.

Με άλλα λόγια αν το $A \subseteq \mathbb{N}$ δεν έχει minimum τότε θα είναι το κενό σύνολο, ισοδύναμα αν το $A \subseteq \mathbb{N}$ δεν είναι κενό τότε αναγκαστικά θα έχει minimum.

Άσκηση 9 (Το ακέραιο μέρος). Δείξτε τα εξής:

(i) Για κάθε $x \geq 0$ υπάρχει ο ελάχιστος φυσικός αριθμός που είναι μεγαλύτερος του x.
Υπόδειξη. Θεωρήστε το σύνολο $A = \{k \in \mathbb{N} \mid k > x\}$.

(ii) Για κάθε $x \geq 0$ υπάρχει ένα $n \in \mathbb{Z}$ με $n \leq x < n+1$.

(iii) Για κάθε $y < 0$ υπάρχει ένα $m \in \mathbb{Z}$ με $m \leq y < m+1$.

(iv) Συμπεράνετε ότι για κάθε $z \in \mathbb{R}$ υπάρχει $m \in \mathbb{Z}$ με $m \leq z < m+1$.

Σχόλιο. Αποδεικνύεται ότι αυτό το $m \in \mathbb{Z}$ είναι μοναδικό για το z. Αυτό το μοναδικό m ονομάζεται **το ακέραιο μέρος του** z. Για παράδειγμα το ακέραιο μέρος του $3,14$ είναι το 3 και το ακέραιο μέρος του $-3,14$ είναι το -4.

Λύση - υποδείξεις.
Για το (i) θεωρούμε το σύνολο $A = \{k \in \mathbb{N} \mid k > x\}$. Το σύνολο A είναι μη κενό από την Αρχιμήδεια Ιδιότητα. Επιπλέον το A είναι υποσύνολο των φυσικών αριθμών. Επομένως από την Αρχή του Ελαχίστου το A έχει ελάχιστο στοιχείο. Με άλλα λόγια υπάρχει ο ελάχιστος φυσικός αριθμός που είναι μεγαλύτερος του x.

Για το (ii) παίρνουμε k να είναι ο ελάχιστος φυσικός μεγαλύτερος του x. Τότε ισχύει $k > x \geq 0$. Αν $k = 1$ τότε $0 \leq x < 1$, οπότε παίρνουμε $n = 0 \in \mathbb{Z}$. Αν $k > 1$ τότε ο $n = k-1$ είναι φυσικός αριθμός, και αφού ο k είναι ο *ελάχιστος φυσικός* μεγαλύτερος του x θα έχουμε $k-1 \leq x < k$, δηλαδή $n \leq x < n+1$.

Για το (iii) εφαρμόζουμε το (ii) για $x = -y > 0$ και έχουμε ένα $n \in \mathbb{Z}$ με $n \leq -y < n+1$. Τότε ισχύει

$$-n-1 < y \leq -n.$$

Αν $y < -n$ παίρνουμε $m = -n-1 \in \mathbb{Z}$ και έχουμε $m < y < m+1$. Αν $y = -n$ παίρνουμε $m = -n \in \mathbb{Z}$ και έχουμε $m = y < m+1$.

Το (iv) είναι άμεσο από τα προηγούμενα: αν $z \geq 0$ εφαρμόζουμε το (ii) για $z = x \geq 0$ και παίρνουμε $m = n \in \mathbb{Z}$ και αν $z < 0$ εφαρμόζουμε το (iii) για $z = y < 0$.

Άσκηση 10 (Πυκνότητα ρητών στους πραγματικούς). Σκοπός αυτής της άσκησης είναι να δείξουμε το εξής αποτέλεσμα που είναι γνωστό ως **πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς αριθμούς**:

Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ με $a < q < b$.

Δείχνουμε το παραπάνω με τα εξής βήματα. Δίνονται αρχικά $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$.

(i) Εξηγήστε γιατί υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $m \in \mathbb{Z}$ με

$$n > \frac{1}{b-a} \quad \text{και} \quad m \leq n \cdot a + 1 < m + 1.$$

(ii) Αν τα m, n είναι όπως στο (i) δείξτε ότι

$$a < \frac{m}{n} < b.$$

Λύση - υποδείξεις.
(i) Από την Αρχιμήδεια Ιδιότητα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ που είναι μεγαλύτερο του πραγματικού αριθμού $\frac{1}{b-a}$. Για να βρούμε το m εφαρμόζουμε το (iv) της Άσκησης 9 στον πραγματικό αριθμό $z = n \cdot a + 1$. Υπάρχει $m \in \mathbb{Z}$ με $m \leq n \cdot a + 1 < m + 1$.

(ii) Έχουμε

$$m \leq n \cdot a + 1 < m + 1.$$

Παίρνουμε τη δεύτερη ανίσωση, αφαιρούμε 1 και διαιρούμε με το $n > 0$. Προκύπτει

$$a < \frac{m}{n} \ .$$

Για να δείξουμε ότι $\frac{m}{n} < b$ παρατηρούμε πρώτα το εξής:

$$\begin{aligned} & n > \frac{1}{b-a} \\ \iff & n(b-a) > 1 \quad (\text{γιατί } b - a > 0) \\ \iff & n \cdot b - n \cdot a > 1 \\ \iff & n \cdot b > 1 + n \cdot a. \end{aligned}$$

Επειδή $n \cdot a + 1 \geq m$ προκύπτει από τα πιο πάνω ότι $n \cdot b > 1 + n \cdot a \geq m$, δηλαδή $n \cdot b > m$. Διαιρούμε με το $n > 0$ και έχουμε $b > \frac{m}{n}$ που είναι το ζητούμενο.

2ος τρόπος για το $m/n < b$: Από την ανίσωση $m \leq n \cdot a + 1$ προκύπτει $\frac{m-1}{n} \leq a$. Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{m}{n} &= \frac{m-1}{n} + \frac{1}{n} \\ &\leq a + \frac{1}{n} \\ &< a + b - a = b. \end{aligned}$$

Άσκηση 11 (Πυκνότητα αρρήτων στους πραγματικούς). Δείξτε ότι για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ υπάρχει $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ με $a < r < b$.

Υπόδειξη: Θεωρήστε τους αριθμούς $\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}$ και εφαρμόστε την προηγούμενη άσκηση. Μπορείτε να πάρετε ως δεδομένο ότι το $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

Λύση - υποδείξεις.

Αφού $a < b$ και $\sqrt{2} > 0$ θα έχουμε επίσης $\dfrac{a}{\sqrt{2}} < \dfrac{b}{\sqrt{2}}$. Από την πυκνότητα των ρητών υπάρχει ένα $q \in \mathbb{Q}$ με

$$\frac{a}{\sqrt{2}} < q < \frac{b}{\sqrt{2}} \ ,$$

ισοδύναμα $a < q \cdot \sqrt{2} < b$. Ο αριθμός $r = q \cdot \sqrt{2}$ δεν μπορεί να είναι ρητός, γιατί αλλιώς και ο αριθμός $q^{-1} \cdot r$ θα ήταν ρητός, (εδώ χρησιμοποιούμε ότι $q^{-1} \in \mathbb{Q}$). Όμως $q^{-1} \cdot r = \sqrt{2}$ που είναι άρρητος. Άρα ο αριθμός r είναι άρρητος.