Μαθηματική Ανάλυση Ι

Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

2ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Άσκηση 1 (Χρήση του συμβολισμού Σ). Συμπληρώστε τα πιο κάτω κενά.

$$17 \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{\dots}^{\dots} \dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{\dots}^{\dots} \dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=0}^{\dots} a_{\dots}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x^k\right) + x^{n+1} = \sum_{k=1}^{\dots} \dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad \text{όπου } a, b \neq 0 \text{ και } n \in \mathbb{N}.$$

Άσκηση 2. Να αποδείξετε ότι για κάθε φυσικούς αριθμούς $0 \leq k \leq n$ ισχύει

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n .$$

Άσκηση 3 (Διωνυμικό Ανάπτυγμα).

(i) Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και κάθε $n \geq 1$ έχουμε

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1} \cdot x + \cdots + \binom{n}{n-1} \cdot x^{n-1} + x^n$$

(ii) Υπολογίστε τον αριθμό

$$a = 1 + \binom{5}{1} \cdot (-2) + \binom{5}{2} \cdot (-2)^2 + \cdots + \binom{5}{4} \cdot (-2)^4 + (-2)^5.$$

(iii) Δείξτε ότι για κάθε $x > -1$ ισχύει

$$1 + \binom{7}{1} \cdot x + \binom{7}{2} \cdot x^2 + \cdots + \binom{7}{6} \cdot x^6 + x^7 \geq 7x + 1.$$

Υπόδειξη για το (iii). Χρησιμοποιήστε την ανισότητα Bernoulli.

Άσκηση 4 (Τρίγωνο του Pascal). Να δείξετε ότι για κάθε θετικούς ακέραιους αριθμούς k, n με $k \leq n$ ισχύει
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

Άσκηση 5. Να δείξετε ότι αν $a, b \in \mathbb{R}$ με $a \notin \mathbb{Q}$ και $0 \neq b \in \mathbb{Q}$, τότε ab και $a + b \notin \mathbb{Q}$. Είναι αλήθεια ότι αν $a, b \notin \mathbb{Q}$, τότε τουλάχιστον ένα από τα ab και $a + b$ δεν ανήκει στο $\mathbb{Q}$;

Άσκηση 6. Δείξτε ότι δεν υπάρχει ρητός αριθμός q, τέτοιος ώστε $q^2 = 3$.

Άσκηση 7. Δείξτε ότι οι αριθμοί $\sqrt{6}$ και $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ δεν είναι ρητοί.

Άσκηση 8 (Απαιτητική). Αποδείξτε την Αρχή του Ελαχίστου με τη βοήθεια της Αρχής της Επαγωγής.

Υπόδειξη. Θεωρήστε ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{N}$ που δεν έχει minimum και εφαρμόστε την Αρχή της Επαγωγής παίρνοντας για ιδιότητα P το εξής:

το $n \in \mathbb{N}$ έχει την ιδιότητα P αν για κάθε φυσικό $k \leq n$ έχουμε $k \notin A$.

Συμπεράνετε ότι ένα $A \subseteq \mathbb{N}$ που δεν έχει minimum πρέπει να είναι το κενό σύνολο.

Άσκηση 9 (Το ακέραιο μέρος). Δείξτε τα εξής:

(i) Για κάθε $x \geq 0$ υπάρχει ο ελάχιστος φυσικός αριθμός που είναι μεγαλύτερος του x.
Υπόδειξη. Θεωρήστε το σύνολο $A = \{k \in \mathbb{N} \mid k > x\}$.

(ii) Για κάθε $x \geq 0$ υπάρχει ένα $n \in \mathbb{Z}$ με $n \leq x < n + 1$.

(iii) Για κάθε $y < 0$ υπάρχει ένα $m \in \mathbb{Z}$ με $m \leq y < m + 1$.

(iv) Συμπεράνετε ότι για κάθε $z \in \mathbb{R}$ υπάρχει $m \in \mathbb{Z}$ με $m \leq z < m + 1$.
Σχόλιο. Αποδεικνύεται ότι αυτό το $m \in \mathbb{Z}$ είναι μοναδικό για το z. Αυτό το μοναδικό m ονομάζεται **το ακέραιο μέρος του** z. Για παράδειγμα το ακέραιο μέρος του $3,14$ είναι το 3 και το ακέραιο μέρος του $-3,14$ είναι το -4.

Άσκηση 10 (Πυκνότητα ρητών στους πραγματικούς). Σκοπός αυτής της άσκησης είναι να δείξουμε το εξής αποτέλεσμα που είναι γνωστό ως **πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς αριθμούς**:

Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ με $a < q < b$.

Δείχνουμε το παραπάνω με τα εξής βήματα. Δίνονται αρχικά $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$.

(i) Εξηγήστε γιατί υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $m \in \mathbb{Z}$ με
$$n > \frac{1}{b-a} \quad \text{και} \quad m \leq n \cdot a + 1 < m + 1.$$

(ii) Αν τα m, n είναι όπως στο (i) δείξτε ότι
$$a < \frac{m}{n} < b.$$

Άσκηση 11 (Πυκνότητα αρρήτων στους πραγματικούς). Δείξτε ότι για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ υπάρχει $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ με $a < r < b$.

Υπόδειξη: Θεωρήστε τους αριθμούς $\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}$ και εφαρμόστε την προηγούμενη άσκηση. Μπορείτε να πάρετε ως δεδομένο ότι το $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.