Μαθηματική Ανάλυση Ι

Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Άσκηση 1. Δείξτε ότι $2^n \geq n+1$ για κάθε $n \geq 1$ με τους εξής δύο τρόπους:

(i) Με την Αρχή της Επαγωγής.

(ii) Με την ανισότητα Bernoulli.

Λύση - υποδείξεις.

(i) Για $n = 1$ έχουμε $2^n = 2^1 = 2 = 1 + 1 = n + 1$.

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \geq 1$ ισχύει $2^n \geq n+1$. Δείχνουμε ότι $2^{n+1} \geq (n+1)+1 = n+2$. Έχουμε:

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2 \cdot (n+1) = 2n + 2 \geq n + 2$$

όπου στην πιο πάνω ανίσωση εφαρμόσαμε την Επαγωγική Υπόθεση.

Από την Αρχή της Επαγωγής έχουμε $2^n \geq n+1$ για κάθε $n \geq 1$.

(ii) Εφαρμόζουμε την ανισότητα Bernoulli $(1+a)^n \geq 1 + na$ για $a = 1$ και έχουμε:

$$(1+1)^n \geq 1 + n \cdot 1$$

ισοδύναμα: $2^n \geq n+1$.

Σχόλιο: Φαίνεται ότι ο δεύτερος τρόπος δεν χρησιμοποιεί την Αρχή της Επαγωγής, αλλά αυτό είναι μόνο επιφανειακό. Η Αρχή της Επαγωγής χρησιμοποιείται έμμεσα γιατί τη χρειαζόμαστε στην απόδειξη της ανισότητας του Bernoulli.

Άσκηση 2. Δείξτε την **αυστηρή** ανισότητα Bernoulli: για κάθε $a > -1$ με $a \neq 0$ και για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 2$ ισχύει:

$$(1+a)^n > 1 + na.$$

Λύση - υποδείξεις.

Με επαγωγή. Θεωρούμε $a > -1$ με $a \neq 0$. Για $n = 2$ έχουμε

$$(1+a)^2 = 1 + 2a + a^2 > 1 + 2a$$

γιατί $a \neq 0$ και συνεπώς $a^2 > 0$.

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \geq 2$ ισχύει $(1+a)^n > 1 + na$. (Επαγωγική Υπόθεση)

Δείχνουμε ότι $(1+a)^{n+1} > 1 + (n+1)a$. Έχουμε

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n \cdot (1+a) > (1+na) \cdot (1+a)$$

(από επαγωγική υπόθεση και γιατί $1 + a > 0$)

$$= 1 + a + na + na^2 = 1 + (n+1)a + na^2 > 1 + (n+1)a,$$

όπου στην τελευταία ανίσωση χρησιμοποιήσαμε ότι $na^2 > 0$ γιατί $a \neq 0$.

Από την Αρχή της Επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 3. Δείξτε ότι:

(i) $2n^2 > 2n + 1$ για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 2$.

(ii) $3^n > n^2$ για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 2$.

Σχόλιο: Παρατηρούμε ότι για $n = 0, 1$ η (i) **δεν** ισχύει. Από την άλλη η (ii) ισχύει για $n = 0, 1$. Παρ' όλα αυτά στην (ii) ξεκινάμε την επαγωγή από το $n = 2$. Αυτό το κάνουμε γιατί θα χρησιμοποιήσουμε την (i) που ισχύει για $n \geq 2$.

Λύση - υποδείξεις.
(i) Για $n = 2$ έχουμε $2n^2 = 2 \cdot 2^2 = 8$ και $2n + 1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$. Άρα ισχύει $2n^2 > 2n + 1$.
Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \geq 2$ ισχύει $2n^2 > 2n + 1$. (Επαγωγική Υπόθεση)
Δείχνουμε ότι $2(n + 1)^2 > 2(n + 1) + 1 = 2n + 3$. Έχουμε

$$2(n + 1)^2 = 2(n^2 + 2n + 1) = 2n^2 + 4n + 2 > (2n + 1) + 4n + 2$$

(από επαγωγική υπόθεση)

$$= 6n + 3 > 2n + 3.$$

Από την Αρχή της Επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.
(ii) Για $n = 2$ έχουμε $3^n = 3^2 = 9 > 4 = 2^2 = n^2$.
Υποθέτουμε ότι $3^n > n^2$ για κάποιο $n \geq 2$. (Επαγωγική Υπόθεση)
Δείχνουμε ότι $3^{n+1} > (n + 1)^2$. Έχουμε

$$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n > 3 \cdot n^2$$

(από επαγωγική υπόθεση)

$$= n^2 + 2n^2 > n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2,$$

όπου στην προηγούμενη ανίσωση χρησιμοποιήσαμε το (i). Άρα δείξαμε ότι $3^{n+1} > (n + 1)^2$ και από την Αρχή της Επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 4. Δείξτε ότι ο αριθμός $(2n+1)^2 - 1$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 8 για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$.

Λύση - υποδείξεις.
Για $n = 1$ έχουμε

$$(2n + 1)^2 - 1 = (2 \cdot 1 + 1)^2 - 1 = 9 - 1 = 8$$

που είναι πολλαπλάσιο του 8.
Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \geq 1$ ο αριθμός $(2n + 1)^2 - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 8. Δείχνουμε ότι ο αριθμός $(2(n + 1) + 1)^2 - 1 = (2n + 3)^2 - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 8.
Από την Επαγωγική Υπόθεση έχουμε $(2n+1)^2 - 1 = 8k$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ ή αλλιώς $(2n+1)^2 = 8k + 1$. Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
(2n + 3)^2 - 1 &= 4n^2 + 12n + 9 - 1 \\
&= 4n^2 + 12n + 8 \\
&= 4n^2 + 4n + 1 + 8n + 7 \\
&= (2n + 1)^2 + 8n + 7 \\
&= 8k + 1 + 8n + 7 \quad \text{(από Επαγωγική Υπόθεση)} \\
&= 8k + 8n + 8 \\
&= 8 \cdot (k + n + 1).
\end{aligned}$$

Δηλαδή το $(2n + 3)^2 - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 8. Από την Αρχή της Επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 5. Δείξτε ότι:

$$2 + 5 + \cdots + (3n - 1) = \frac{n(3n + 1)}{2} \qquad \text{για κάθε } n \geq 1.$$

(Όταν $n = 1$ θεωρούμε ότι το αριστερό σκέλος είναι ίσο με 2, δηλαδή σε αυτή την περίπτωση το άθροισμα αποτελείται μόνο από τον πρώτο όρο του.)

Λύση - υποδείξεις.
Για $n = 1$ το δεξιό σκέλος είναι ίσο με

$$\frac{n(3n+1)}{2} = \frac{1 \cdot (3 \cdot 1 + 1)}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \geq 1$ έχουμε

$$2 + 5 + \cdots + (3n - 1) = \frac{n(3n+1)}{2}.$$

(Επαγωγική Υπόθεση)
Δείχνουμε ότι

$$2 + 5 + \cdots + (3(n+1) - 1) = \frac{(n+1)(3(n+1)+1)}{2}.$$

Φέρνουμε το δεξιό σκέλος σε πιο απλή μορφή:

$$\frac{(n+1)(3(n+1)+1)}{2} = \frac{(n+1)(3n+4)}{2}.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} 2 + 5 + \cdots + (3(n+1) - 1) &= 2 + 5 + \cdots + (3n - 1) + (3(n+1) - 1) \\ &= \frac{n(3n+1)}{2} + (3(n+1) - 1) \qquad \text{(Από Επαγωγική Υπόθεση)} \\ &= \frac{n(3n+1)}{2} + 3n + 2 \\ &= \frac{n(3n+1) + 6n + 4}{2} \\ &= \frac{3n^2 + n + 6n + 4}{2} \\ &= \frac{3n^2 + 7n + 4}{2} \\ &= \frac{(n+1)(3n+4)}{2}. \end{aligned}$$

Από την Αρχή της Επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 6. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή να αποδείξετε ότι, για κάθε φυσικό αριθμό n, ισχύει η ταυτότητα

$$1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Λύση - υποδείξεις.
Για $n = 1$ ισχύει. Έστω ότι ισχύει για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι ισχύει για το $n + 1$, δηλ.

$$1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Πράγματι, χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση, έχουμε

$$\begin{aligned} 1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= (n+1) \cdot \frac{2n^2 + 7n + 6}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \end{aligned}$$

Συνεπώς η ταυτότητα, σύμφωνα με την αρχή της μαθηματικής επαγωγής, θα ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 7. Δείξτε ότι $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Μπορείτε να βρείτε μια γεωμετρική ερμηνεία της παραπάνω ισότητας;

Λύση - υποδείξεις.
Για $n = 1$ ισχύει. Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι ισχύει για το $n+1$. Πράγματι, με χρήση της Επαγωγικής Υπόθεσης έχουμε

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) + (2(n+1)-1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 .$$

Άρα ισχύει για $n+1$ και από την αρχή της μαθηματικής επαγωγής για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 8. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή να αποδείξετε ότι, για κάθε φυσικό αριθμό n, ισχύει η ταυτότητα

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} .$$

Λύση - υποδείξεις.
Για $n = 1$ ισχύει. Έστω ότι ισχύει για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι ισχύει για το $n+1$, δηλαδή ότι

$$\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n+2} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} .$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n+2} \\
&= \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \\
&= \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) + \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \left(\frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}\right),
\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε την επαγωγική υπόθεση.

Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι

$$\frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = -\frac{1}{2n+2},$$

το οποίο επαληθεύεται εύκολα με πράξεις.

Άρα σύμφωνα με την αρχή της μαθηματικής επαγωγής, η ταυτότητα θα ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 9. Δείξτε ότι για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ έχουμε $m + n \in \mathbb{N}$ και $m \cdot n \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη. Εφαρμόστε επαγωγή στο n ξεχωριστά για τον κάθε ένα από τους πιο πάνω ισχυρισμούς.

Λύση - υποδείξεις.
Θεωρούμε $m \in \mathbb{N}$ και δείχνουμε με επαγωγή στο $n \in \mathbb{N}$ ότι $m + n \in \mathbb{N}$. Για $n = 1$ έχουμε $m+n = m+1$ το οποίο ανήκει στο $\mathbb{N}$ γιατί $m \in \mathbb{N}$ και το $\mathbb{N}$ είναι επαγωγικό σύνολο. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $m+n \in \mathbb{N}$ και δείχνουμε ότι $m+(n+1) \in \mathbb{N}$. Προφανώς $m+(n+1) = (m+n)+1$. Αφού $m+n \in \mathbb{N}$ (επαγωγική υπόθεση) και αφού το $\mathbb{N}$ είναι επαγωγικό σύνολο έχουμε ότι ο αριθμός $(m+n)+1$ ανήκει στο $\mathbb{N}$. Από την Αρχή Επαγωγής προκύπτει ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $m + n \in \mathbb{N}$. Επειδή το m είναι αυθαίρετο, ο τελευταίος ισχυρισμός ισχύει για κάθε $m \in \mathbb{N}$, δηλαδή για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ έχουμε $m + n \in \mathbb{N}$.

Για τον πολλαπλασιασμό, παίρνουμε $m \in \mathbb{N}$ και δείχνουμε με επαγωγή στο n ότι $m \cdot n \in \mathbb{N}$. Για $n = 1$ έχουμε $m \cdot 1 = m \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $m \cdot n \in \mathbb{N}$ και δείχνουμε ότι $m\cdot(n+1)\in\mathbb{N}$. Από την επιμεριστική ιδιότητα ισχύει $m\cdot(n+1)=m\cdot n+m$. Ο αριθμός $m\cdot n$ είναι φυσικός από την επαγωγική υπόθεση. Αποδείξαμε πιο πάνω ότι το άθροισμα φυσικών αριθμών είναι φυσικών, επομένως $m\cdot n+m=m\cdot(n+1)\in\mathbb{N}$. Από την Αρχή Επαγωγής έχουμε ότι $m\cdot n\in\mathbb{N}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

Άσκηση 10. Δείξτε ότι το σύνολο $A=\{\, n\in\mathbb{N} \;:\; (n-3)\cdot(n+2)\cdot(n+4)>0 \,\}$ είναι μη κενό και βρείτε το ελάχιστο στοιχείο του.

Λύση - υποδείξεις.
Παρατηρούμε ότι $4\in A$ επομένως το $\min A$ θα είναι κάποιος από τους αριθμούς $0,1,2,3,4$.

Ένας τρόπος για να βρούμε το $\min A$ είναι να πάρουμε τα $0,1,2,3$ και να εξετάσουμε ένα-ένα αν ανήκουν στο A. Πιο σύντομα παρατηρούμε ότι

$$(k-3)\cdot(k+2)\cdot(k+4)\leq 0$$

για κάθε $k=0,1,2,3$ γιατί για αυτά τα k θα έχουμε $k-3\leq 0$ και $k+2, k+3\geq 0$. Επομένως $k\notin A$ για κάθε $k=0,1,2,3$ και αφού $4\in A$ θα έχουμε $\min A=4$

Ένας ελαφρά διαφορετικός τρόπος είναι να θεωρήσουμε το πολυώνυμο

$$p(x)=(x-3)\cdot(x+2)\cdot(x+4),\;\; x\in\mathbb{R}.$$

Με τη βοήθεια του πίνακα προσήμων βρίσκουμε ότι $p(x)>0$ ακριβώς όταν $-4<x<-2$ ή $x>3$. Εμείς θέλουμε τον ελάχιστο φυσικό για τον οποίο $p(x)>0$ που είναι το $x=4$. Άρα $\min A=4$.

Άσκηση 11. Να βρείτε το minimum/maximum των ακόλουθων συνόλων εφόσον αυτά υπάρχουν (με πλήρη αιτιολόγηση):

$$\begin{aligned} A &= \left\{\, x\in\mathbb{N} \;:\; 3<x^2-1\leq 15 \,\right\}\\ B &= (1,2]\\ C &= \left\{\, x\in\mathbb{Q} \;:\; 0<x\leq 1 \,\right\}\\ D &= \left\{\, n^2+3 \;:\; n\in\mathbb{N} \,\right\}\end{aligned}$$

Υπόδειξη. Για να δείξουμε ότι ένα μη κενό σύνολο $X\subseteq\mathbb{R}$ δεν έχει minimum θεωρούμε ένα $x\in X$ και δείχνουμε ότι υπάρχει $y\in X$ που είναι μικρότερο του x.

Λύση - υποδείξεις.
Για το A έχουμε

$$3<x^2-1\leq 15 \iff 4<x^2\leq 16.$$

Το x είναι φυσικός αριθμός, ελέγχουμε μερικές τιμές:

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1	4	9	16

Συνεπώς $A=\{3,4\}$ και $\min A=3$, $\max A=4$.

Για το B έχουμε ότι $\max B=2$. Το B δεν έχει minimum γιατί αν $x\in B$ τότε $1<(1+x)/2<x\leq 2$, επομένως ο αριθμός $(1+x)/2$ είναι στοιχείο του B που είναι μικρότερο του x.

Όμοια με πριν $\max C=1$ και το C δεν έχει minimum γιατί αν $x\in C$ τότε $0<x/2<x\leq 1$. Επειδή $x\in\mathbb{Q}$ έχουμε επίσης $x/2\in\mathbb{Q}$. Άρα $x/2\in\mathbb{Q}\cap(0,1]$ δηλαδή $x/2\in C$. Άρα υπάρχει ένα στοιχείο του C που είναι μικρότερο x.

Τέλος για το D έχουμε ότι $\min D=3$. Για να το δούμε αυτό παίρνουμε $n=0$ και έχουμε $0^2+3=3$. Επιπλέον αν έχουμε $n\in\mathbb{N}$ τότε $3\leq n^2+3$. Δηλαδή το 3 είναι μικρότερο ή ίσο από κάθε άλλο στοιχείο του D.

Το D δεν έχει maximum γιατί αν πάρουμε $x=n^2+3\in D$ τότε το $y=(n+1)^2+3$ είναι επίσης στοιχείο του D που είναι μεγαλύτερο του x.

Άσκηση 12. Δείξτε ότι το μέγιστο και το ελάχιστο ενός μη κενού συνόλου A, εφόσον υπάρχουν, είναι μοναδικά.

Λύση - υποδείξεις.
Ας υποθέσουμε ότι τα b και b' είναι μέγιστα του A. Τότε $b \in A$ και για κάθε $x \in A$ ισχύει $x \le b$. Για $x = b' \in A$ έχουμε $b' \le b$. Όμοια $b \le b'$, άρα $b = b'$.

Η μοναδικότητα του ελάχιστου αποδεικνύεται με όμοιο τρόπο.

Άσκηση 13. Δείξτε ότι το ελάχιστο κάτω φράγμα και το μέγιστο κάτω φράγμα ενός μη κενού συνόλου A, εφόσον υπάρχουν, είναι μοναδικά.

Λύση - υποδείξεις.
Ας υποθέσουμε ότι τα b και b' είναι ελάχιστα άνω φράγματα του A. Αφού το b' είναι άνω φράγμα του A και το b είναι ελάχιστο άνω φράγμα έχουμε $b \le b'$. Όμοια $b' \le b$, άρα $b = b'$.

Η μοναδικότητα του μέγιστου κάτω φράγματος αποδεικνύεται με όμοιο τρόπο.

Άσκηση 14 (Σύγκριση supremum και maximum). Δίνεται ένα μη κενό σύνολο A. Δείξτε τα ακόλουθα:

(i) Αν υπάρχει το $\max A$ τότε $\max A = \sup A$.
Δηλαδή το μέγιστο ενός συνόλου είναι και ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου.

(ii) Αν υπάρχει το $\sup A$ και ισχύει $\sup A \in A$ τότε $\sup A = \max A$.
Δηλαδή αν το ελάχιστο άνω φράγμα ενός συνόλου είναι και στοιχείο του συνόλου, τότε είναι μέγιστο.

Ποιες είναι οι αντίστοιχες προτάσεις για τα $\min A$ και $\inf A$;

Λύση - υποδείξεις.
(i) Υποθέτουμε ότι υπάρχει το $b = \max A$. Τότε το b είναι προφανώς άνω φράγμα του A. Επιπλέον αν το b' είναι ένα άνω φράγμα του A, τότε, αφού $b \in A$ έχουμε $b \le b'$. Άρα το b είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A.

(ii) Υποθέτουμε ότι υπάρχει το $c = \sup A$ και ότι $c \in A$. Τότε το c είναι άνω φράγμα του A και στοιχείο του A. Από τον ορισμό του μέγιστου στοιχείου έχουμε ότι $c = \max A$.

Άσκηση 15. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή ή λανθασμένη κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις:

(i) Ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ περιέχει πάντα το supremum του.
(ii) Αν $x < M$ για κάθε στοιχείο του συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$, τότε $\sup A < M$.
(iii) Αν A και B είναι μη κενά φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και για κάθε $a \in A$ και $b \in B$ ισχύει $a < b$, τότε $\sup A < \inf B$.
(iv) Αν $\sup A \le \sup B$, τότε υπάρχει στοιχείο του B που είναι άνω φράγμα του συνόλου A.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Λύση - υποδείξεις.
(i) Σωστή, αφού κάθε πεπερασμένο σύνολο έχει μέγιστο στοιχείο το οποίο είναι και το supremum του.
(ii) Λάθος, αφού για παράδειγμα $\sup[0,1) = 1$.
(iii) Λάθος, αφού για παράδειγμα $\sup[0,1) = 1 = \inf(1,2]$.
(iv) Λάθος. Παίρνουμε για παράδειγμα $A = B = [0,1)$.

Άσκηση 16. Να προσδιορίσετε το infimum και το supremum των συνόλων
$$(0,1],\ (0,1),\ [0,1).$$

Λύση - υποδείξεις.
Όλα τα σύνολα έχουν infimum 0 και supremum 1. Δίνουμε λεπτομέρειες για το $(0,1]$, η αιτιολόγηση για τα άλλα σύνολα είναι όμοια.

Το 0 είναι προφανώς κάτω φράγμα και το 1 άνω φράγμα του $(0,1]$. Επίσης, το 1 είναι στοιχείο του $(0,1]$, συνεπώς είναι μέγιστο στοιχείο και άρα supremum του $(0,1]$. Αν το b είναι κάτω φράγμα του $(0,1]$ τότε $b \le 0$. Αλλιώς θα είχαμε $0 < b$ και άρα $0 < \frac{b}{2}$. Επίσης $b < 1$ γιατί το b είναι κάτω φράγμα του $(0,1]$, άρα το $\frac{b}{2}$ θα ήταν ένα στοιχείο του $(0,1]$, το οποίο είναι άτοπο γιατί $\frac{b}{2} < b$ και το b είναι κάτω φράγμα του $(0,1]$. Επομένως $b \le 0$. Αυτό αποδεικνύει ότι $0 = \inf(0,1]$.

Άσκηση 17 (Υπολογισμός supremum). Προσδιορίστε το supremum των πιο κάτω συνόλων

$$A = \left\{ \frac{n}{2n+1} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}, \quad B = \left\{ \frac{n}{m} \ : \ m, n \in \mathbb{N} \text{ και } n + m \le 10 \right\}.$$

(Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.)

Λύση - υποδείξεις.

Δείχνουμε ότι $\sup A = \dfrac{1}{2}$. Προφανώς $\dfrac{n}{2n+1} < \dfrac{n}{2n} = \dfrac{1}{2}$.

Από γνωστό χαρακτηρισμό του supremum αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in A$ με $\frac{1}{2} - \varepsilon < x$. Θεωρούμε λοιπόν $\varepsilon > 0$. Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\dfrac{n}{2n+1} > \frac{1}{2} - \varepsilon$. Το τελευταίο είναι ισοδύναμο με

$$n > \frac{1}{4 \cdot \varepsilon} - \frac{1}{2}.$$

Ένα τέτοιο $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει από την Αρχιμήδεια ιδιότητα.

Σχετικά με το B παρατηρούμε ότι μπορούμε να πάρουμε $m = 1$ και $n = 9$, οπότε $9 = \dfrac{9}{1} \in B$. Επιπλέον αν $n + m \le 10$ τότε $\dfrac{n}{m} + 1 \le \dfrac{10}{m}$, επομένως $\dfrac{n}{m} \le \dfrac{10}{m} - 1 \le 10 - 1 = 9$.

Αυτό δείχνει ότι το $9 \in B$ είναι άνω φράγμα του B, συνεπώς $9 = \max B = \sup B$.

Άσκηση 18 (Χαρακτηρισμός supremum). Θεωρούμε ένα μη κενό $A \subseteq \mathbb{R}$ και ένα $b \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι το b είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A αν και μόνο αν

(1) το b είναι άνω φράγμα του A και

(2) για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in A$ με $b - \varepsilon < x$.

Λύση - υποδείξεις.

Υποθέτουμε ότι το b είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A και δείχνουμε τα πιο πάνω (1) και (2). Το (1) είναι προφανές. Για το (2) θεωρούμε ένα $\varepsilon > 0$. Αφού το b είναι το *ελάχιστο* άνω φράγμα του A τότε το $b - \varepsilon$, ως ένας αριθμός μικρότερος του b, δεν είναι άνω φράγμα του A. Δηλαδή υπάρχει $x \in A$ με $b - \varepsilon < x$.

Αντίστροφα υποθέτουμε ότι το b ικανοποιεί τα (1) και (2) και δείχνουμε ότι $b = \sup A$. Αρκεί να δείξουμε ότι $b \le b'$ για κάθε άνω φράγμα b' του A. Θεωρούμε λοιπόν ένα άνω φράγμα b' του A και υποθέτουμε προς άτοπο ότι $b' < b$. Θέτουμε $\varepsilon = b - b' > 0$. Από το (2) υπάρχει $x \in A$ με $b - \varepsilon < x$. Αλλά $b - \varepsilon = b - (b - b') = b'$ και άρα $b' < x$. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι το b' είναι άνω φράγμα του A και $x \in A$. Επομένως $b \le b'$.

Άσκηση 19. (α)(Χαρακτηρισμός infimum) Έστω $A \ne \emptyset$ κάτω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $c \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $c = \inf A$ αν και μόνο αν

(1) το c είναι κάτω φράγμα του A και

(2) για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $x < c + \varepsilon$.

(β) Να αποδείξετε ότι $\left\{ \frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\} = 0$.

Υπόδειξη για το (β). Να χρησιμοποιήσετε το (α) και την Αρχιμήδεια ιδιότητα.

Λύση - υποδείξεις.

(α) Αν $c = \inf A$ τότε προφανώς το c είναι κάτω φράγμα του A. Επίσης κάθε μεγαλύτερος αριθμός από το c δεν είναι κάτω φράγμα του A και συνεπώς για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $x < c + \varepsilon$.

Αντίστροφα, αρκεί να δείξουμε ότι $b \le c$ για κάθε κάτω φράγμα b του A. Αν το $b \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί $b > c$, θέτουμε $\varepsilon = b - c$ και έχουμε από το (2) οτι υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε

$$x < a + \varepsilon = a + (b - a) = b.$$

Συνεπώς δεν υπάρχει $b > c$ που να είναι κάτω φράγμα του A, δηλαδή κάθε κάτω φράγμα b του A ικανοποιεί $b \le c$.

(β) Κατ'αρχήν $\frac{1}{n} > 0$, δηλ. το 0 είναι κάτω φράγμα του συνόλου. Επιπλέον αν $\varepsilon > 0$, τότε από την Αρχιμήδεια ιδιότητα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{n} < \varepsilon$ και συνεπώς από το (α) προκύπτει το συμπέρασμα.

Άσκηση 20 (Απαιτητική). Έστω A, B μη κενά άνω φραγμένα σύνολα πραγματικών αριθμών και θέτουμε

$$A + B = \{\, a + b \ : \ a \in A \text{ και } b \in B \,\} \,.$$

Να αποδείξετε ότι

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B \,.$$

Λύση - υποδείξεις.

1ος τρόπος. Για κάθε $a \in A \,, b \in B$ ισχύει προφανώς ότι $a + b \le \sup A + \sup B$, επομένως το $\sup A + \sup B$ είναι άνω φράγμα του $A + B$ και άρα $\sup(A + B) \le \sup A + \sup B$.

Για την αντίστροφη ανισότητα θεωρούμε $\varepsilon > 0$. Λόγω του χαρακτηρισμού του supremum υπάρχουν $a \in A$ και $b \in B$ τέτοια ώστε

$$a > \sup A - \frac{\varepsilon}{2} \text{ και } b > \sup B - \frac{\varepsilon}{2} \,.$$

Συνεπώς

$$a + b > (\sup A + \sup B) - \varepsilon \,.$$

Με άλλα λόγια για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in A + B$ με $x > (\sup A + \sup B) - \varepsilon$. Πάλι από τον χαρακτηρισμό του supremum (αυτή τη φορά για το σύνολο $A + B$) προκύπτει ότι $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

2ος τρόπος. Αρχικά έχουμε $\sup(A + B) \le \sup A + \sup B$ όπως στον 1ο τρόπο. Δείχνουμε ότι $\sup A + \sup B \le \sup(A + B)$, ισοδύναμα ότι $\sup A \le \sup(A + B) - \sup B$.

Εφόσον το $\sup A$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A αρκεί να δείξουμε ότι ο αριθμός $\sup(A + B) - \sup B$ είναι άνω φράγμα του A. Θεωρούμε λοιπόν $a \in A$ και δείχνουμε ότι

$$a \le \sup(A + B) - \sup B,$$

ισοδύναμα $\sup B \le \sup(A + B) - a$.

Εφόσον το $\sup B$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του B αρκεί να δείξουμε ότι ο αριθμός $\sup(A + B) - a$ είναι άνω φράγμα του B. Παίρνουμε $b \in B$ και δείχνουμε ότι

$$b \le \sup(A + B) - a,$$

ισοδύναμα $a + b \le \sup(A + B)$. Το τελευταίο όμως είναι προφανές γιατί $a + b \in A + B$ και το $\sup(A + B)$ είναι άνω φράγμα του $A + B$.

Άσκηση 21. Για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ θέτουμε

$$-A = \{-a : \, a \in A\} \,.$$

Δείξτε τα ακόλουθα.

(i) Αν το $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι μη κενό και κάτω φραγμένο, τότε το $-A$ είναι άνω φραγμένο και ισχύει

$$\sup(-A) = -\inf A.$$

(ii) Αν το $B \subseteq \mathbb{R}$ είναι μη κενό και άνω φραγμένο, τότε το $-B$ είναι κάτω φραγμένο και ισχύει

$$\inf(-B) = -\sup B.$$

Λύση - υποδείξεις.

(i) Αν το $c \in \mathbb{R}$ είναι κάτω φράγμα του A τότε για κάθε $a \in A$ έχουμε $c \leq a$ και άρα $-a \leq -c$. Με άλλα λόγια το $-c$ είναι άνω φράγμα του $-A$, ειδικότερα το $-A$ είναι άνω φραγμένο. Μάλιστα για $c = \inf A$ συμπεραίνουμε ότι το $-\inf A$ είναι άνω φράγμα του $-A$ και συνεπώς $\sup(-A) \leq -\inf A$.

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι $\sup(-A) \geq -\inf A$, ισοδύναμα $\inf A \geq -\sup(-A)$. Επειδή το $\inf A$ είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του A αρκεί να δείξουμε ότι το $-\sup(-A)$ είναι κάτω φράγμα του A. Πράγματι, θεωρούμε $a \in A$, τότε $-a \in (-A)$ και άρα $-a \leq \sup(-A)$, ισοδύναμα $-\sup(-A) \leq a$ και έχουμε το ζητούμενο.

(ii) Ένας τρόπος είναι να εφαρμόσουμε παρόμοια επιχειρήματα με το (i). Ένας άλλος τρόπος είναι, δοσμένου ενός μη κενού άνω φραγμένου B, να εφαρμόσουμε το (i) στο σύνολο $A = -B$. Παρατηρήστε ότι το A είναι μη κενό κάτω φραγμένο και ότι $-A = -(-B) = B$.

Άσκηση 22 (Ισοδύναμη διατύπωση του Αξιώματος Πληρότητας). Δείξτε ότι το Αξίωμα Πληρότητας (κάθε μη κενό άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει supremum) είναι ισοδύναμο με την πρόταση: κάθε μη κενό κάτω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει infimum.

Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 21.

Λύση - υποδείξεις.

Για την ευθεία κατεύθυνση, αν το σύνολο A είναι μη κενό κάτω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, τότε από το (α) της Άσκησης 21 το $-A$ είναι άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ (και μάλιστα μη κενό). Από το Αξίωμα Πληρότητας το $-A$ έχει supremum και επομένως από το (α) της Άσκησης 21 ο πραγματικός αριθμός $-\sup(-A)$ είναι το $\inf A$.

Η αντίστροφη κατεύθυνση αποδεικνύεται όμοια χρησιμοποιώντας το (β) της Άσκησης 21.