Μαθηματική Ανάλυση Ι

Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Άσκηση 1. Δείξτε ότι $2^n \geq n+1$ για κάθε $n \geq 1$ με τους εξής δύο τρόπους:

(i) Με την Αρχή της Επαγωγής.

(ii) Με την ανισότητα Bernoulli.

Άσκηση 2. Δείξτε την **αυστηρή** ανισότητα Bernoulli: για κάθε $a > -1$ με $a \neq 0$ και για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 2$ ισχύει:

$$(1+a)^n > 1 + na.$$

Άσκηση 3. Δείξτε ότι:

(i) $2n^2 > 2n+1$ για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 2$.

(ii) $3^n > n^2$ για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 2$.

Σχόλιο: Παρατηρούμε ότι για $n = 0, 1$ η (i) **δεν** ισχύει. Από την άλλη η (ii) ισχύει για $n = 0, 1$. Παρ' όλα αυτά στην (ii) ξεκινάμε την επαγωγή από το $n = 2$. Αυτό το κάνουμε γιατί θα χρησιμοποιήσουμε την (i) που ισχύει για $n \geq 2$.

Άσκηση 4. Δείξτε ότι ο αριθμός $(2n+1)^2 - 1$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 8 για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$.

Άσκηση 5. Δείξτε ότι:

$$2 + 5 + \cdots + (3n-1) = \frac{n(3n+1)}{2} \qquad \text{για κάθε } n \geq 1.$$

(Όταν $n = 1$ θεωρούμε ότι το αριστερό σκέλος είναι ίσο με 2, δηλαδή σε αυτή την περίπτωση το άθροισμα αποτελείται μόνο από τον πρώτο όρο του.)

Άσκηση 6. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή να αποδείξετε ότι, για κάθε φυσικό αριθμό n, ισχύει η ταυτότητα

$$1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Άσκηση 7. Δείξτε ότι $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Μπορείτε να βρείτε μια γεωμετρική ερμηνεία της παραπάνω ισότητας;

Άσκηση 8. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή να αποδείξετε ότι, για κάθε φυσικό αριθμό n, ισχύει η ταυτότητα

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}.$$

Άσκηση 9. Δείξτε ότι για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ έχουμε $m + n \in \mathbb{N}$ και $m \cdot n \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη. Εφαρμόστε επαγωγή στο n ξεχωριστά για τον κάθε ένα από τους πιο πάνω ισχυρισμούς.

Άσκηση 10. Δείξτε ότι το σύνολο $A = \{\, n \in \mathbb{N} \;:\; (n-3)\cdot(n+2)\cdot(n+4) > 0 \,\}$ είναι μη κενό και βρείτε το ελάχιστο στοιχείο του.

Άσκηση 11. Να βρείτε το minimum/maximum των ακόλουθων συνόλων εφόσον αυτά υπάρχουν (με πλήρη αιτιολόγηση):

$$\begin{aligned} A &= \left\{\, x \in \mathbb{N} \;:\; 3 < x^2 - 1 \le 15 \,\right\} \\ B &= (1, 2] \\ C &= \left\{\, x \in \mathbb{Q} \;:\; 0 < x \le 1 \,\right\} \\ D &= \left\{\, n^2 + 3 \;:\; n \in \mathbb{N} \,\right\} \end{aligned}$$

Υπόδειξη. Για να δείξουμε ότι ένα μη κενό σύνολο $X \subseteq \mathbb{R}$ δεν έχει minimum θεωρούμε ένα $x \in X$ και δείχνουμε ότι υπάρχει $y \in X$ που είναι μικρότερο του x.

Άσκηση 12. Δείξτε ότι το μέγιστο και το ελάχιστο ενός μη κενού συνόλου A, εφόσον υπάρχουν, είναι μοναδικά.

Άσκηση 13. Δείξτε ότι το ελάχιστο κάτω φράγμα και το μέγιστο κάτω φράγμα ενός μη κενού συνόλου A, εφόσον υπάρχουν, είναι μοναδικά.

Άσκηση 14 (Σύγκριση supremum και maximum). Δίνεται ένα μη κενό σύνολο A. Δείξτε τα ακόλουθα:

(i) Αν υπάρχει το $\max A$ τότε $\max A = \sup A$.
Δηλαδή το μέγιστο ενός συνόλου είναι και ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου.

(ii) Αν υπάρχει το $\sup A$ και ισχύει $\sup A \in A$ τότε $\sup A = \max A$.
Δηλαδή αν το ελάχιστο άνω φράγμα ενός συνόλου είναι και στοιχείο του συνόλου, τότε είναι μέγιστο.

Ποιες είναι οι αντίστοιχες προτάσεις για τα $\min A$ και $\inf A$;

Άσκηση 15. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή ή λανθασμένη κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις:

(i) Ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ περιέχει πάντα το supremum του.
(ii) Αν $x < M$ για κάθε στοιχείο του συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$, τότε $\sup A < M$.
(iii) Αν A και B είναι μη κενά φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και για κάθε $a \in A$ και $b \in B$ ισχύει $a < b$, τότε $\sup A < \inf B$.
(iv) Αν $\sup A \le \sup B$, τότε υπάρχει στοιχείο του B που είναι άνω φράγμα του συνόλου A.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Άσκηση 16. Να προσδιορίσετε το infimum και το supremum των συνόλων

$$(0,1],\ (0,1),\ [0,1).$$

Άσκηση 17 (Υπολογισμός supremum). Προσδιορίστε το supremum των πιο κάτω συνόλων

$$A = \left\{ \frac{n}{2n+1} \;:\; n \in \mathbb{N} \right\}, \quad B = \left\{ \frac{n}{m} \;:\; m, n \in \mathbb{N} \text{ και } n + m \le 10 \right\}.$$

(Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.)

Άσκηση 18 (Χαρακτηρισμός supremum). Θεωρούμε ένα μη κενό $A \subseteq \mathbb{R}$ και ένα $b \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι το b είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A αν και μόνο αν

(1) το b είναι άνω φράγμα του A και

(2) για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in A$ με $b - \varepsilon < x$.

Άσκηση 19. (α)(Χαρακτηρισμός infimum) Έστω $A \neq \emptyset$ κάτω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $c \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $c = \inf A$ αν και μόνο αν

(1) το c είναι κάτω φράγμα του A και

(2) για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $x < c + \varepsilon$.

(β) Να αποδείξετε ότι $\left\{ \frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\} = 0$.

Υπόδειξη για το (β). Να χρησιμοποιήσετε το (α) και την Αρχιμήδεια ιδιότητα.

Άσκηση 20 (Απαιτητική). Έστω A, B μη κενά άνω φραγμένα σύνολα πραγματικών αριθμών και θέτουμε

$$A + B = \{ \, a + b \ : \ a \in A \text{ και } b \in B \, \} \ .$$

Να αποδείξετε ότι

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B \, .$$

Άσκηση 21. Για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ θέτουμε

$$-A = \{-a : \, a \in A\} \ .$$

Δείξτε τα ακόλουθα.

(i) Αν το $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι μη κενό και κάτω φραγμένο, τότε το $-A$ είναι άνω φραγμένο και ισχύει

$$\sup(-A) = -\inf A.$$

(ii) Αν το $B \subseteq \mathbb{R}$ είναι μη κενό και άνω φραγμένο, τότε το $-B$ είναι κάτω φραγμένο και ισχύει

$$\inf(-B) = -\sup B.$$

Άσκηση 22 (Ισοδύναμη διατύπωση του Αξιώματος Πληρότητας). Δείξτε ότι το Αξίωμα Πληρότητας (κάθε μη κενό άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει supremum) είναι ισοδύναμο με την πρόταση: κάθε μη κενό κάτω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει infimum.

Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 21.