ΣΝΜΜ
Μαθηματική Ανάλυση
Λύσεις του 9ου φυλλαδίου ασκήσεων

Ασκηση 1. *Δίνεται η συνάρτηση* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *με τύπο*

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{3}x + 2\ .$$

Δείξτε ότι η f *είναι αντιστρέψιμη και στη συνέχεια υπολογίστε το* $(f^{-1})'(2)$.

Λύση. Αφού $f'(x) = x^2 + 5/3 > 0$, η f είναι γνησίως αύξουσα και άρα "$1-1$". Επίσης

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

και συνεπώς σύμφωνα με το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών η f είναι επί του $\mathbb{R}$. Ορίζεται επομένως η

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

και σύμφωνα με το θεώρημα για την παράγωγο αντίστροφης συνάρτησης θα έχουμε

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(2))}\ .$$

Όμως

$$f^{-1}(2) = x \Leftrightarrow x = 0\,.$$

Επομένως

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(0)} = 3/5\,.$$

□

Ασκηση 2. *Έστω ότι η συνάρτηση* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχής στο* $[a, b]$, *διαφορίσιμη στο* (a, b) *και* $f(a) = f(b) = 0$. *Δείξτε οτι για κάθε* $\gamma \in \mathbb{R}$, *υπάρχει* $x_0 \in (a, b)$ *τέτοιο ώστε*

$$\gamma f(x_0) + f'(x_0) = 0\ .$$

Λύση. Έστω $\gamma \in \mathbb{R}$. Αν θέσουμε $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) = e^{\gamma x} f(x)\,,$$

τότε $g(\alpha) = g(\beta) = 0$ και επομένως ικανοποιούνται για την g οι προυποθέσεις του Θεωρήματος Rolle. Θα υπάρχει συνεπώς $x_0 \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε

$$g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \gamma f(x_0) + f'(x_0) = 0\ .$$

□

Ασκηση 3. *Να δείξετε ότι* $\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2} = 2\arctan x$, *για κάθε* $x \geq 0$.

Λύση. Η συνάρτηση arccos είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ και συνεπώς η συνάρτηση
$$f(x) = \arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$$
είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \neq 0$. Έχουμε λοιπόν για κάθε $x > 0$
$$\begin{aligned}(\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2})' &= \frac{-1}{\sqrt{1-(\frac{1-x^2}{1+x^2})^2}}(\frac{1-x^2}{1+x^2})' \\ &= \frac{2}{1+x^2} \\ &= (2\arctan x)'\,.\end{aligned}$$
Συνεπώς υπάρχει σταθερά c, τέτοια ώστε για κάθε $x > 0$ να έχουμε ότι
$$\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2} = 2\arctan x + c\,.$$
Θέτοντας $x = 1$ στην παραπάνω σχέση βρίσκουμε ότι $c = 0$. Τέλος η ισότητα προφανώς ισχύει και για $x = 0$ και συνεπώς
$$\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2} = 2\arctan x,\ \text{για κάθε } x \geq 0\,.$$
□

Ασκηση 4. *Δείξτε ότι*
$$|\arctan x - \arctan y| \leq |x-y|\,,\ \text{για κάθε } x,y \in \mathbb{R}\,.$$

Λύση. Έστω $x, y \in \mathbb{R}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $x < y$. Αν εφαρμόσουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής για τη συνάρτηση $f(x) = \arctan t$ στο διάστημα $[x,y]$, τότε βρίσκουμε $\xi \in (x,y)$ τέτοιο ώστε
$$\frac{\arctan x - \arctan y}{x-y} = \frac{1}{1+\xi^2} \leq 1$$
από όπου προκύπτει το ζητούμενο. □

Ασκηση 5. *Θα λέμε ότι η συνάρτηση $f : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ είναι τοπικά σταθερή αν για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$ υπάρχει $\delta > 0$, που πιθανώς εξαρτάται από το x, τέτοιο ώστε η f να είναι σταθερή στο $(x-\delta, x+\delta)$. Δείξτε ότι αν η f είναι τοπικά σταθερή, τότε είναι σταθερή.*

Λύση. Έστω $x \in (\alpha,\beta)$. Τότε, αφού η f είναι τοπικά σταθερή, για h αρκετά μικρό θα έχουμε ότι
$$f(x+h) = f(x)$$
και συνεπώς
$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0\,.$$
'ρα η f είναι σταθερή. □