ΣΝΜΜ
Μαθηματική Ανάλυση
Λύσεις του 8ου φυλλαδίου ασκήσεων

Ασκηση 1. *Δείξτε ότι αν* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha$ *και* $\lim_{x\to x_0} g(x) = \beta$, *τότε*

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = \alpha + \beta \, .$$

Λύση. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha$ και $\lim_{x\to x_0} g(x) = \beta$ μπορούμε να βρούμε δ_1 και δ_2 θετικούς πραγματικούς αριθμούς τέτοιους ώστε

$$|f(x) - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \, , \text{ για κάθε } x \in D_f \text{ με } 0 < |x - x_0| < \delta_1$$

και

$$|f(x) - \beta| < \frac{\varepsilon}{2} \, , \text{ για κάθε } x \in D_g \text{ με } 0 < |x - x_0| < \delta_2 \, .$$

Οπότε αν επιλέξουμε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, τότε για κάθε $x \in D_f \cap D_g$ με $0 < |x - x_0| < \delta$ θα έχουμε ότι

$$|(f(x) - g(x)) - (\alpha + \beta)| \leq |f(x) - \alpha| + |g(x) - \beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

από όπου προκύπτει το συμπέρασμα. □

Ασκηση 2 (Η αρχή της μεταφοράς). *Να δείξετε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (x_n) στο πεδίο ορισμού της f με $\lim x_n = x_0$, ισχύει $\lim f(x_n) = f(x_0)$.*

Λύση. Έστω ότι η f είναι συνεχής στο x_0 και (x_n) στο πεδίο ορισμού της f με $\lim x_n = x_0$. Αν $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε x στο πεδίο ορισμού της f με $|x - x_0| < \delta$ ισχύει $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Αφού $\lim x_n = x_0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $|x_n - x_0| < \delta$, για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$, για κάθε $n \geq n_0$ και συνεπώς $\lim f(x_n) = f(x_0)$.

Αντίστροφα έστω ότι για κάθε ακολουθία (x_n) στο πεδίο ορισμού της f με $\lim x_n = x_0$, ισχύει $\lim f(x_n) = f(x_0)$ και η f δεν είναι συνεχής στο x_0. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να υπάρχει x_n στο πεδίο ορισμού της f με $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ και $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$, δηλαδή $\lim x_n = x_0$ και $\lim f(x_n) \neq f(x_0)$ το οποίο είναι άτοπο. Αρα η f είναι συνεχής στο x_0. □

Ασκηση 3. *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και $f(q) = 0$, για κάθε ρητό αριθμό $q \in (\alpha, \beta)$. Δείξτε ότι η $f(x) = 0$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.*
(Υπόδ: χρησιμοποιήστε την πυκνότητα των ρητών και την αρχή της μεταφοράς)

Λύση. Έστω $x \in (\alpha, \beta)$. Τότε λόγω της πυκνότητας των ρητών θα υπάρχει ακολουθία (q_n) με $q_n \in \mathbb{Q}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε

$$\lim q_n = x \, .$$

Όμως

$$\lim f(q_n) = 0$$

και συνεπώς σύμφωνα με την Αρχή της μεταφοράς και τη συνέχεια της f θα έχουμε ότι $f(x) = 0$. $\square$

Ασκηση 4. *Να δείξετε ότι δεν υπάρχει το όριο*

$$\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x} .$$

(Υπόδειξη: να χρησιμοποιήσετε την αρχή της μεταφοράς)

Λύση. Αν

$$x_\nu = \frac{1}{2\nu\pi + \frac{\pi}{2}} \text{ και } y_\nu = \frac{1}{2\nu\pi} ,$$

τότε $\lim x_\nu = \lim y_\nu = 0$ ενώ

$$\lim \sin \frac{1}{x_\nu} = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \neq 0 = \sin 0 = \lim \sin \frac{1}{y_\nu} .$$

Συνεπώς από την αρχή μεταφοράς το όριο δεν υπάρχει. $\square$

Ασκηση 5. *Έστω συνάρτηση $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ συνεχής στο x_0. Δείξτε ότι αν $f(x_0) > 0$, τότε υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ να ισχύει ότι $f(x) > 0$.*

Λύση. Από τον ορισμό της συνέχειας για $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$ υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ να ισχύει ότι $|f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2}$. Επομένως $f(x) > \frac{f(x_0)}{2} > 0$, για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. $\square$