**ΣΝΜΜ**
**Ασκήσεις στη Μαθηματική Ανάλυση**
Λύσεις του 7ου φυλλαδίου ασκήσεων

**Ασκηση 1.** *Ελέγξτε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:*

$$(\alpha)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)(n+5)}\ , (\beta)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{5n+7}\,.$$

**Λύση.** $(\alpha)$ Έχουμε ότι

$$0 < \frac{1}{(n+1)(n+3)(n+5)} < \frac{1}{n^2}\,,\ \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

και συνεπώς η σειρά συγκλίνει από το κριτήριο σύγκρισης με τη σειρά $\sum 1/n^2$.
$(\beta)$ Έχουμε ότι

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{5n+7} = \frac{2}{5} \neq 0$$

και άρα από το κριτήριο απόκλισης η σειρά θα αποκλίνει. □

**Ασκηση 2.** *Έστω $(\alpha_n)$ ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι η σειρά*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{2+n^2\alpha_n}$$

*συγκλίνει.*

**Λύση.** Έχουμε ότι

$$0 \leq \frac{\alpha_n}{2+n^2\alpha_n} \leq \frac{\alpha_n}{n^2\alpha_n} = \frac{1}{n^2}\,,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και συνεπώς από το κριτήριο σύγκρισης, για σειρές με θετικούς όρους, έχουμε το συμπέρασμα. □

**Ασκηση 3.** *Έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνει.*

*(ι) Δείξτε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $|\alpha_n| < 1$, για κάθε $n \geq n_0$.*

*(ιι) Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$ συγκλίνει επίσης. Ισχύει το αντίστροφο;*

*(ιιι) Υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ συγκλίνει επίσης. Να δείξετε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\beta_n$ συγκλίνει απόλυτα.*

*(Υπόδειξη: για το (ι) να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό του ορίου ακολουθίας και για τα (ιι), (ιιι) το κριτήριο σύγκρισης.)*

**Λύση.**

(ι) Αφού η σειρά συγκλίνει θα έχουμε ότι $\lim \alpha_n = 0$. Συνεπώς, από τον ορισμό του ορίου ακολουθίας για $\varepsilon = 1$, θα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $|\alpha_n| < 1$, για κάθε $n \geq n_0$.

(ιι) Από το (ι) υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε

$$|\alpha_n| < 1\,, \text{ για κάθε } n \geq n_0\,.$$

Συνεπώς

$$0 < \alpha_n^2 < |\alpha_n|\,, \text{ για κάθε } n \geq n_0\,.$$

Οπότε η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$ θα συγκλίνει από το κριτήριο σύγκρισης με τη σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$.

Το αντίστροφο δεν ισχύει αφού για παράδειγμα η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ συγκλίνει ενώ η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ αποκλίνει.

(ιιι) Έχουμε ότι

$$|\alpha_n \beta_n| \leq \frac{\alpha_n^2 + \beta_n^2}{2}\,.$$

Από το (ιι) οι σειρές $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$ και $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2$ συγκλίνουν. Επομένως από το κριτήριο σύγκρισης η δοσμένη σειρά συγκλίνει απόλυτα.

□

**Ασκηση 4.** *Ελέγξτε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:*

$$(\alpha)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!n!}{(3n)!}\,, (\beta)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{4^n}\,, (\gamma)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!}\,.$$

**Λύση.** (α) Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο λόγου. Είναι

$$\frac{\frac{(n+1)!(n+1)!}{(3n+3)!}}{\frac{n!n!}{(3n)!}} = \frac{n+1}{3(3n+1)(3n+2)} \to 0 < 1$$

και άρα η σειρά συγκλίνει.
(β) Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο λόγου.

$$\lim |\frac{\frac{(-1)^{n+1}(n+1)^3}{4^{n+1}}}{\frac{(-1)^n n^3}{4^n}}| = \frac{1}{4} < 1$$

και άρα η σειρά συγκλίνει.
(γ) Έχουμε ότι

$$\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)n^n} = (1+\frac{1}{n})^n \to e > 1$$

και άρα από το κριτήριο λόγου η σειρά αποκλίνει. □

**Ασκηση 5.** *Δίνεται η ακολουθία $(a_n)$ με αναδρομικό τύπο*

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2+a_n^2}\,, a_1 > 0\,.$$

*Βρείτε τα όρια των ακολουθιών $(a_n)$, $(\frac{a_{n+1}}{a_n})$ και μελετήστε τη σύγκλιση των σειρών*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n \text{ και } \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(a_n+\frac{1}{n})\,.$$

**Λύση.** Έχουμε ότι $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_{n+1} = \frac{a_n}{2+a_n^2} < a_n$. Η $(a_n)$ είναι δηλαδή φθίνουσα και κάτω φραγμένη και άρα συγκλίνουσα. Αν $a$ το όριο της, τότε από τον αναδρομικό τύπο παίρνουμε ότι $a(2+a^2) = a$ και συνεπώς $a = 0$. Χρησιμοποιώντας πάλι τον αναδρομικό τύπο βρίσκουμε ότι

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$$

και αυτό με τη σειρά του μας δίνει από το κριτήριο του λόγου ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n$ συγκλίνει. Τέλος η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(a_n+\frac{1}{n})$ συγκλίνει από το κριτήριο Leibniz. □