ΣΝΜΜ
Ασκήσεις στη Μαθηματική Ανάλυση
Λύσεις του 6ου φυλλαδίου ασκήσεων

Ασκηση 1. *Έστω (α_n) ακολουθία μή αρνητικών αριθμών και υποθέτουμε ότι $\lim \alpha_n = \alpha > 0$. Να δείξετε ότι $\lim \sqrt[n]{\alpha_n} = 1$.*

Λύση. Θέτοντας $\varepsilon = \frac{\alpha}{2} > 0$, στον ορισμό του ορίου ακολουθίας έχουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε

$$\frac{\alpha}{2} < \alpha_n < \frac{3\alpha}{2},$$

για κάθε $n \geq n_0$. Παίρνοντας $n-$οστές ρίζες έχουμε ότι

$$\sqrt[n]{\frac{\alpha}{2}} < \sqrt[n]{\alpha_n} < \sqrt[n]{\frac{3\alpha}{2}}$$

για κάθε $n \geq n_0$. Συνεπώς από ισοσυγκλίνουνες έχουμε το συμπέρασμα. □

Ασκηση 2. *(ι) Έστω (α_n) ακολουθία μη-μηδενικών αριθμών με*

$$\lim_{n\to+\infty} |\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}| = \rho < 1.$$

Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0.$$

(ιι) (Ένα πολύ σημαντικό όριο) Δείξτε ότι, για κάθε πραγματικό αριθμό x, ισχύει ότι

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

Λύση.

(ι) Από τον ορισμό του ορίου ακολουθίας, για $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό έτσι ώστε $\rho + \varepsilon < 1$, θα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε

$$|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}| < \rho + \varepsilon, \text{ για κάθε } n \geq n_0.$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις ανισότητες που προκύπτουν από n_0 έως n παίρνουμε ότι

$$|\alpha_{n+1}| < c\lambda^{n+1},$$

όπου $0 < \lambda = \rho + \varepsilon < 1$ και $c = |\alpha_{n_0}|\lambda^{-n_0}$. Οπότε αφού $\lambda^n \to 0$ έχουμε το συμπέρασμα, από ισοσυγκλίνουσες.

(ιι) Χρησιμοποιήστε το (ι).

□

Ασκηση 3. *Να υπολογίσετε τα όρια:*

(ι) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$,

(ιι) $\lim_{n\to\infty} n\lambda^n$, *όπου* $|\lambda|<1$,

(ιιι) $\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

Λύση. (ι)

$$\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0\,.$$

(ιι)

$$\lim_{n\to+\infty}|\frac{(n+1)\lambda^{n+1}}{n\lambda^n}| = |\lambda| < 1$$

και συνεπώς η ακολουθία $(n\lambda^n)$ συγκλίνει στο 0.

(ιιι)

$$\begin{aligned} 0 < \frac{(n!)^2}{(2n)!} &= \frac{n!}{(n+1)(n+2)...(n+n)} \\ &= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{2}{n+2}\cdots\frac{n}{n+n} \\ &< \frac{1}{n+1}\,. \end{aligned}$$

Επομένως, από το θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών, προκύπτει ότι $\beta_n \to 0$, καθώς $n\to+\infty$. □

Ασκηση 4. *Να προσδιορίσετε τα* $x\in\mathbb{R}$, *για τα οποία συγκλίνουν οι σειρές*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + ...$$

και

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + ...$$

Στη συνέχεια, για αυτά τα x, *να βρείτε τα αθροίσματα τους.*

Λύση. Πρόκειται για γεωμετρικές σειρές με λόγο $\lambda=-x$ και $\lambda=-x^2$ αντίστοιχα. Συνεπώς συγκλίνουν για $|x|<1$ με

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2} \text{ και } \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$$

Παρατηρείστε, γιατί θα το χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια, ότι η δεύτερη σειρά για $|x|<1$, μας δίνει την παράγωγο της συνάρτησης $\ln x$. Όπως θα δούμε αργότερα, για $|x|<1$, η πρώτη σειρά μας δίνει την παράγωγο της συνάρτησης $\arctan x$. □

Ασκηση 5. *Αποδείξτε ότι αν* $\lim_{n\to+\infty} \beta_n = \beta$ *και* $\alpha_n = \beta_n - \beta_{n+1}\,, n \in \mathbb{N}$, *τότε*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \beta_1 - \beta\,.$$

Λύση. Πρόκειται για τηλεσκοπική σειρά αφού η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της είναι η

$$s_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \beta_1 - \beta_2 + \beta_2 - \beta_3 + \ldots + \beta_n - \beta_{n+1} = \beta_1 - \beta_{n+1} \to \beta_1 - \beta$$

και συνεπώς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \beta_1 - \beta\,.$$

□