ΣΝΜΜ
Ασκήσεις στη Μαθηματική Ανάλυση
Λύσεις του 5ου φυλλαδίου ασκήσεων

Ασκηση 1 (Τρίγωνο του Pascal). *Να δείξετε ότι για κάθε $n, k \in \mathbb{N}$ με $0 \leq k \leq n$ ισχύει*

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

Λύση. Έχουμε ότι

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}(\frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{k}) = \binom{n+1}{k}.$$

□

Ασκηση 2. *Να αποδείξετε ότι για κάθε $n, k \in \mathbb{N}$ με $0 \leq k \leq n$ ισχύει*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Λύση. Εφαρμόστε το διωνυμικό ανάπτυγμα για $a = b = 1$. □

Ασκηση 3. *Να δείξετε ότι αν $\lim \frac{a_n}{n^2} = 1$, τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $a_n > \frac{n^2}{3}$, για κάθε $n \geq n_0$.*

Λύση. Εφαρμόστε τον ορισμό του ορίου ακολουθίας για $\varepsilon = \frac{2}{3} > 0$. □

Ασκηση 4. *(ι) Έστω (α_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|} < 1.$$

Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0.$$

(ιι) Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{2n+1}{3n+2})^n = 0.$$

Λύση.

(ι) Θέτουμε

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|} < 1.$$

Τότε, για $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό θα έχουμε ότι θα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε

$$\sqrt[n]{|\alpha_n|} < \rho + \varepsilon < 1 \text{ για κάθε } n \geq n_0.$$

Επομένως θέτοντας $\lambda = \rho + \varepsilon < 1$, έχουμε

$$0 \leq |\alpha_n| < \lambda^n \,, \text{ για κάθε } n \geq n_0 \,.$$

Συνεπώς, από ισοσυγκλίνουσες, έχουμε ότι $|\alpha_n| \to 0$ και άρα

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \,.$$

(ιι) Εφαρμογή του (ι).

□

Ασκηση 5. *Εστω (α_n) ακολουθία μή αρνητικών αριθμών και υποθέτουμε ότι $\lim \alpha_n = \alpha > 0$. Να δείξετε ότι $\lim \sqrt[n]{\alpha_n} = 1$.*

Λύση. Θέτοντας $\varepsilon = \frac{\alpha}{2} > 0$, στον ορισμό του ορίου ακολουθίας έχουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε

$$\frac{\alpha}{2} < \alpha_n < \frac{3\alpha}{2} \,,$$

για κάθε $n \geq n_0$. Παίρνοντας $n-$οστές ρίζες έχουμε ότι

$$\sqrt[n]{\frac{\alpha}{2}} < \sqrt[n]{\alpha_n} < \sqrt[n]{\frac{3\alpha}{2}}$$

για κάθε $n \geq n_0$. Συνεπώς από ισοσυγκλίνουνες έχουμε το συμπέρασμα. □

Ασκηση 6. *Δίνεται η ακολουθία (α_n) που ορίζεται με τον αναδρομικό τύπο*

$$\alpha_1 = 1 \,,\ \alpha_{n+1} = \sqrt{3\alpha_n} \,.$$

(ι) Δείξτε, χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, ότι η (α_n) είναι άνω φραγμένη από τον αριθμό 3.

(ιι) Δείξτε ότι η (α_n) είναι αύξουσα.

(ιιι) Εξηγήστε το λόγο για τον οποίο συγκλίνει η (α_n) και στη συνέχεια υπολογίστε το όριο της.

Λύση. (ι) Για $n = 1$ έχουμε $\alpha_1 = 1 < 3$, που ισχύει. Έστω ότι ισχύει για την τιμή n. Τότε

$$\alpha_{n+1} = \sqrt{3\alpha_n} \leq \sqrt{9} = 3 \,.$$

Επομένως, από την αρχή της μαθηματικής επαγωγής $\alpha_n \leq 3$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
(ιι) Το (ι) μας δίνει άμεσα και το ότι η ακολουθία είναι αύξουσα, αφού

$$\alpha_n \leq \alpha_{n+1} \Leftrightarrow \alpha_n^2 - 3\alpha_n \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \alpha_n \leq 3 \,.$$

(ιιι) Τέλος από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε ότι υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$, με

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha \,.$$

Παίρνοντας όρια και στα δύο μέλη του αναδρομικού τύπου

$$\alpha_{n+1} = \sqrt{3\alpha_n}$$

καταλήγουμε στο ότι $\alpha = 0$ ή $\alpha = 3$. Η περίπτωση $\alpha = 0$ απορρίπτεται αφού $\alpha_n > 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. 'ρα $\alpha = 3$. □