ΣΝΜΜ
Μαθηματική Ανάλυση
Λύσεις του 4ου φυλλαδίου ασκήσεων

Ασκηση 1. *Αν* $\lim a_n = a$ *και* $\lim b_n = b$*, να δείξετε ότι* $\lim(a_n + b_n) = a + b$.

Λύση. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε αφού $\lim a_n = a$ και $\lim b_n = b$ υπάρχουν $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ και $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$, για κάθε $n \geq n_1$ και $n \geq n_2$ αντίστοιχα. Οπότε αν θέσουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ έχουμε ότι

$$|a_n + b_n - a - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,\ \text{για κάθε } n \geq n_0\,.$$

Συνεπώς $\lim(a_n + b_n) = a + b$. □

Ασκηση 2. *Να δείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό υπάρχει ακολουθία ρητών αριθμών που συγκλίνει σε αυτόν. (Υποδειξη: να χρησιμοποιήσετε την πυκνότητα)*

Λύση. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, από την πυκνότητα των ρητών στο $\mathbb{R}$, υπάρχει $x_n \in \mathbb{Q}$ τέτοιο ώστε $x - \frac{1}{n} < x_n < x + \frac{1}{n}$. Οπότε $|x_n - x| < \frac{1}{n}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ οπότε $\lim|x_n - x| = 0$ και άρα έχουμε το συμπέρασμα. □

Ασκηση 3. *Να υπολογίσετε το όριο*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right).$$

Λύση. Έχουμε ότι

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

και συνεπώς από το (ι) έχουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) = 1\,.$$

Σημειώστε ότι το συγκεκριμένο όριο ειναι ένα παράδειγμα του ότι είναι λάθος να πάρουμε όριο σε κάθε όρο του αθροίσματος χωριστά! □

Ασκηση 4. *Έστω ότι* $\lim a_n = \alpha > 0$*. Να δείξετε ότι υπάρχει* $n_0 \in \mathbb{N}$*, τέτοιο ώστε* $a_n > 0$*, για κάθε* $n \geq n_0$.

Λύση. Εφαρμόζουμε τον ορισμό του ορίου ακολουθίας για $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό έτσι ώστε $\alpha - \varepsilon > 0$ (π.χ. $\varepsilon = \alpha/2$) και έχουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε

$$0 < \alpha - \varepsilon < a_n\,,\ \text{για κάθε } n \geq n_0\,.$$

□

Ασκηση 5. *Έστω* a, b *θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Υπολογίστε το όριο*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n + b^n}\,.$$

Λύση. Έχουμε ότι αν $\gamma = \max\{a, \beta\}$, τότε

$$\gamma = \sqrt[n]{\gamma^n} \leq \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq \sqrt[n]{2\gamma^n} = \gamma \sqrt[n]{2}\,,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς (και αφού $\sqrt[n]{2} \to 1$) έχουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \gamma\,.$$

□