ΣΝΜΜ
Μαθηματική Ανάλυση
Λύσεις του 3ου φυλλαδίου ασκήσεων

Ασκηση 1. *Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή να αποδείξετε ότι, για κάθε φυσικό αριθμό n, ισχύει η ταυτότητα*

$$1 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,.$$

Λύση. Για $n = 1$ ισχύει. Έστω ότι ισχύει για την τιμή n. Θα δείξουμε ότι ισχύει για την τιμή $n + 1$, δηλ.

$$1 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\,.$$

Πράγματι, χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση, έχουμε

$$\begin{aligned} 1 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= (n+1)\frac{2n^2+7n+6}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\,. \end{aligned}$$

Συνεπώς η ταυτότητα, σύμφωνα με την αρχή της μαθηματικής επαγωγής, θα ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$. □

Ασκηση 2. *Δείξτε ότι $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n + 1) = (n + 1)^2$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Μπορείτε να βρείτε μια γεωμετρική ερμηνεία της παραπάνω ισότητας;*

Λύση. Για $n = 1$ ισχύει. Υποθέτουμε ότι ισχύει για n. Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n + 1$. Πράγματι

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) + (2n+1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2\,.$$

Άρα ισχύει για $n + 1$ και από την αρχή της μαθηματικής επαγωγής για κάθε $n \in \mathbb{N}$. □

Ασκηση 3. *Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή να αποδείξετε ότι, για κάθε φυσικό αριθμό n, ισχύει η ταυτότητα*

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\,.$$

Λύση. Για $n = 1$ ισχύει. Έστω ότι ισχύει για την τιμή n. Θα δείξουμε ότι ισχύει για την τιμή $n + 1$, δηλ.

$$\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + ... + \frac{1}{2n+2} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\,.$$

Αυτό όμως, από την επαγωγική υπόθεση, είναι ισοδύναμο με το

$$
\begin{aligned}
1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2} &= \\
=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}
\end{aligned}
$$

το οποίο μετά τις απλοποιήσεις είναι ισοδύναμο με το

$$-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+2}=-\frac{1}{2n+2}$$

που ισχύει.

Άρα σύμφωνα με την αρχή της μαθηματικής επαγωγής, η ταυτότητα θα ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ασκηση 4. *Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου ακολουθίας, να δείξετε ότι*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0\,.$$

Λύση. Έστω $\varepsilon>0$. Από την Αρχιμήδεια ιδιότητα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $\frac{1}{n_0}<\varepsilon^2$ και επομένως

$$\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon\,,\ \text{για κάθε } n \geq n_0\,.$$

□

Ασκηση 5. *(ι) Να δείξετε ότι*

$$\lim \alpha_n = a \Leftrightarrow \lim(\alpha_n - a)=0 \Leftrightarrow \lim|\alpha_n - a| = 0\,.$$

(ιι) Να δείξετε $\lim \alpha_n = 0 \Leftrightarrow \lim|\alpha_n| = 0$.

Λύση. Προκύπτει άμεσα από τον ορισμό του ορίου ακολουθίας. Προσέξτε ότι το (ιι) δεν ισχύει αν το όριο δεν είναι 0 (γιατί;). □