ΣΝΜΜ
Μαθηματική Ανάλυση
Λύσεις του 2ου φυλλαδίου ασκήσεων

Ασκηση 1. *Προσδιορίστε το supremum των παρακάτω συνόλων*

(ι) $\left\{ \dfrac{n}{2n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$,

(ιι) $\left\{ \dfrac{n}{m} : n, \mu \in \mathbb{N} \text{ και } n + m \leq 10 \right\}$.

(Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.)

Λύση. (ι) Θα δείξουμε ότι το supremum είναι το $\dfrac{1}{2}$. Καταρχήν το $\dfrac{1}{2}$ είναι άνω φράγμα του συνόλου αφού

$$\frac{n}{2n+1} < \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}\,.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\frac{n}{2n+1} > \frac{1}{2} - \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}\,.$$

Τέτοιο $n \in \mathbb{N}$ όμως υπάρχει λόγω της Αρχιμήδειας ιδιότητας. Συνεπώς το συμπέρασμα έπεται από τον τον χαρακτηρισμό του supremum.
(ιι) Το supremum είναι το 9 αφού είναι το μέγιστο του συνόλου. □

Ασκηση 2. *Να χαρακτηρίσετε ως σωστή ή λανθασμένη κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις:*

(ι) *Ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ περιέχει πάντα το supremum του.*

(ιι) *Αν $x < M$ για κάθε στοιχείο του συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$, τότε $\sup A < M$.*

(ιιι) *Αν A και B είναι υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και ισχύει $\alpha < \beta$, για κάθε $\alpha \in A$ και $\beta \in B$, τότε $\sup A < \inf B$.*

(ιυ) *Αν $\sup A \leq \sup B$, τότε υπάρχει στοιχείο του B που είναι άνω φράγμα του συνόλου A.*

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Λύση.

(ι) Σωστή, αφού κάθε πεπερασμένο σύνολο έχει μέγιστο στοιχείο το οποίο είναι και το supremum του.

(ιι) Λάθος, αφού για παράδειγμα $\sup[0,1) = 1$.

(ιιι) Λάθος, αφού για παράδειγμα $\sup[0,1) = 1 = \inf(1,2]$.

(ιυ) Λάθος. Παίρνουμε για παράδειγμα $A = B = [0,1)$.

Ασκηση 3. *Έστω A, B μη κενά άνω φραγμένα σύνολα πραγματικών αριθμών και θέτουμε*

$$A + B = \{\alpha + \beta : \alpha \in A \text{ και } \beta \in B\} .$$

Να αποδείξετε ότι

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B .$$

Λύση. Για κάθε $\alpha \in A, \beta \in B$ ισχύει προφανώς ότι $\alpha + \beta \leq \sup A + \sup B$. Έστω $\varepsilon > 0$. Λόγω του χαρακτηρισμού του supremum υπάρχει $\alpha \in A$ και $\beta \in B$ τέτοια ώστε

$$\alpha > \sup A - \frac{\varepsilon}{2} \text{ και } \beta > \sup B - \frac{\varepsilon}{2} .$$

Συνεπώς

$$\alpha + \beta > (\sup A + \sup A) - \varepsilon .$$

Άρα και πάλι από τον χαρακτηρισμό του supremum

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B .$$

□

Ασκηση 4. *(α) Έστω $A \neq \emptyset$ κάτω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\alpha = \inf A$ αν και μόνο αν*

(ι) το α είναι κάτω φράγμα του A και

(ιι) για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $x < \alpha + \epsilon$.

(β) Να αποδείξετε ότι $\inf\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} = 0$.
(Υπόδειξη: για το (β) να χρησιμοποιήσετε το (α) και την Αρχιμήδεια ιδιότητα)

Λύση. (α) Αν $\alpha = \inf A$ τότε προφανώς το α είναι κάτω φράγμα του A. Επίσης κάθε μεγαλύτερος αριθμός από το α δεν είναι κάτω φράγμα του A και συνεπώς για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $x < \alpha + \varepsilon$.

Αντίστροφα, αν $\beta > \alpha$ και θέσουμε $\varepsilon = \beta - \alpha$ τότε από το (ιι) υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε

$$x < \alpha + \varepsilon = \alpha + (\beta - \alpha) = \beta .$$

Συνεπώς το β δεν είναι κάτω φράγμα του A και αφού από το (ι) το α είναι κάτω φράγμα του A έχουμε ότι $\alpha = \inf A$.

(β) Καταρχήν $\frac{1}{n} > 0$, δηλ. το 0 είναι κάτω φράγμα του συνόλου. Επιπλέον αν $\varepsilon > 0$, τότε από την Αρχιμήδεια ιδιότητα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{n} < \varepsilon$ και συνεπώς από το (α) προκύπτει το συμπέρασμα. □

Ασκηση 5. *Με* $\inf A$ *συμβολίζουμε το μέγιστο κάτω φράγμα (infimum) ενός υποσυνόλου* A *του* $\mathbb{R}$.
(α) Θέτουμε
$$-A = \{-\alpha : a \in A\} .$$
Να δείξετε ότι $\sup(-A) = -\inf A$.
(β) Δείξτε, χρησιμοποιώντας το αξίωμα πληρότητας, ότι κάθε κάτω φραγμένο, μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ *έχει infimum.*

Λύση. (α) Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε από την άσκηση 4 έχουμε ότι υπάρχει $x \in A$ με $x < \inf A + \varepsilon$ και άρα $-x > -\inf A - \varepsilon$. Συνεπώς από το χαρακτηρισμό του supremum έχουμε το ζητούμενο.
(β) Αν το σύνολο A είναι κάτω φραγμένο, μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, τότε το $-A$ είναι άνω φραγμένο, μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Επομένως από την αρχή της πληρότητας έχει supremum. Τότε όμως από το (α) $\inf A = -\sup(-A)$. □