ΣΝΜΜ
Ασκήσεις στη Μαθηματική Ανάλυση
Λύσεις του 1ου φυλλαδίου ασκήσεων

Ασκηση 1. *Δείξτε ότι δεν υπάρχει ρητός αριθμός q, τέτοιος ώστε $q^2 = 3$.*

Λύση. Έστω ότι υπάρχουν φυσικοί αριθμοί $\mu\,,\nu$ (μπορούμε να υποθέσουμε ότι δεν έχουν κοινό παράγοντα) τέτοιοι ώστε

$$(\frac{\mu}{\nu})^2 = 3,.$$

Τότε $\mu^2 = 3\nu^2$, δηλαδή ο μ^2 είναι πολλαπλάσιο του 3. Ισχυριζόμαστε ότι τότε και ο μ είναι πολλαπλάσιο του 3. Πράγματι αν κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει ο μ θα είναι της μορφής $3k+1$ ή $3k+2$. Τότε όμως $(3k+1)^2 = 3(3k^2+2k)+1$ και $(3k+2)^2 = 3(3k^2+4k+1)+1$. Δηλαδή ο μ^2 δεν είναι πολλαπλάσιο του 3. Ατοπο!

Επομένως $\mu = 3k$, για κάποιον φυσικό $k \Rightarrow \mu^2 = 9k^2$. Τότε $\nu^2 = 3k^2 \Rightarrow$ ο ν^2 άρα και ο ν θα είναι πολλαπλάσια του 3. Ατοπο αφού έχουμε υποθέσει ότι οι $\mu\,,\nu$ δεν έχουν κοινό παράγοντα. $\square$

Ασκηση 2. *Να δείξετε ότι αν $a, b \in \mathbb{R}$ με $a \notin \mathbb{Q}$ και $0 \neq b \in \mathbb{Q}$, τότε ab και $a + b \notin \mathbb{Q}$. Είναι αλήθεια ότι αν $a, b \notin \mathbb{Q}$, τότε ab και $a + b \notin \mathbb{Q}$;*

Λύση. Αν $ab = q \in \mathbb{Q}$, τότε αφού $b \neq 0$ θα έχουμε ότι $a = b^{-1}q \in \mathbb{Q}$ το οποίο είναι άτοπο. Αντίστοιχα αποδεικνύεται και το ότι $a + b \notin \mathbb{Q}$.

Η απάντηση στο ερώτημα είναι όχι αφού αν πάρουμε $a = \sqrt{2}$ και $b = -\sqrt{2}$, τότε $ab = -2$ και $a + b = 0$. $\square$

Ασκηση 3. *Δείξτε ότι οι αριθμοί $\sqrt{6}$ και $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ δεν είναι ρητοί.*

Λύση. Έστω ότι υπάρχουν φυσικοί αριθμοί $\mu\,,\nu$ (μπορούμε να υποθέσουμε ότι δεν έχουν κοινό παράγοντα) τέτοιοι ώστε

$$\frac{\mu}{\nu} = \sqrt{6}\,.$$

Τότε $\mu^2 = 6\nu^2$, δηλαδή ο μ^2 είναι πολλαπλάσιο του 2 και του 3. Τότε, από την ασκ. 1 και την απόδειξη για το $\sqrt{2}$, ο μ είναι πολλαπλάσιο του 2 και του 3. Αρα $\mu = 6k$, για κάποιον φυσικό $k \Rightarrow \mu^2 = 36k^2$. Συνεπώς $\nu^2 = 6k^2 \Rightarrow$ ο ν^2 άρα και ο ν θα είναι πολλαπλάσια του 6. Ατοπο αφού έχουμε υποθέσει ότι οι $\mu\,,\nu$ δεν έχουν κοινό παράγοντα.

Αν υποθέσουμε ότι ο $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ είναι ρητός, τότε και το τετράγωνο του θα είναι ρητός. Δηλαδή $2 + 3 + 2\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί τότε $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$. $\square$

Ασκηση 4. *Να προσδιορίσετε το infimum και το supremum των συνόλων*

$$(0, 1]\,, (0, 1)\,, [0, 1) \text{ και } \left\{ \frac{1}{n} : n = 1, 2, ... \right\}.$$

Λύση. Όλα τα σύνολα έχουν infimum 0 και supremum 1. $\square$