ΣΝΜΜ
Μαθηματική Ανάλυση
Λύσεις του 11ου φυλλαδίου ασκήσεων

Ασκηση 1. *Να δείξετε ότι*

$$1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}<\sqrt{1+x}<1+\frac{x}{2}\,,\ \text{για κάθε } x>0\,.$$

Λύση. Έστω $x>0$. Ο τύπος του Taylor για τη συνάρτηση $f(x)=\sqrt{1+x}$, μέ κέντρο το 0 για $n=1$ μας δίνει ότι

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{1}{8}(1+\xi)^{-\frac{3}{2}}x^2$$

για κάποιο $\xi\in(0,x)$ και επομένως $\sqrt{1+x}<1+\frac{x}{2}$.

Αντίστοιχα για $n=2$ έχουμε

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{3}{8}(1+\xi)^{-\frac{5}{2}}x^3$$

για κάποιο $\xi\in(0,x)$ και επομένως $\sqrt{1+x}>1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$. □

Ασκηση 2. *Να δείξετε ότι* $\sin x\geq x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}$, *για κάθε* $x\in[-\pi,0]$.

Λύση. Σύμφωνα με το Θεώρημα Taylor, έχουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$, υπάρχει ξ μεταξύ του x και του 0, τέτοιο ώστε

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{\sin\xi}{6!}x^6\,.$$

Αν $x\in[-\pi,0)$, τότε $\xi\in(-\pi,0)$ και συνεπώς $-\sin\xi>0$. Οπότε

$$\sin x\geq x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\,,$$

για κάθε $x\in[-\pi,0]$, με την ισότητα να ισχύει για $x=0$. □

Ασκηση 3. *Να δείξετε ότι*

$$0<x-\ln(1+x)<\frac{x^2}{2}\,,\ \text{για κάθε } x>0\,.$$

Λύση. Έστω $x>0$. Ο τύπος του Taylor για τη συνάρτηση $f(x)=\ln(1+x)$, μέ κέντρο το 0 για $n=1$ μας δίνει ότι

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{1+\xi}x^2$$

για κάποιο $\xi\in(0,x)$ και επομένως $x-\ln(1+x)>0$.

Αντίστοιχα για $n=2$ έχουμε ότι

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{2(1+\xi)^{-3}}{3!}x^3$$

για κάποιο $\xi\in(0,x)$ και επομένως $x-\ln(1+x)<\frac{x^2}{2}$. □

Ασκηση 4. *Έστω ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι απεριόριστα διαφορίσιμη και*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(2n-1)}(x_0) = 0\,,$$

για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$ και κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι αν $f^{(2n)}(x_0) > 0$, τότε η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό ελάχιστο.

Λύση. Λόγω της υπόθεσης, σύμφωνα με το Θεώρημα Taylor, έχουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$, υπάρχει ξ μεταξύ του x_0 και του x, τέτοιο ώστε

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}(x - x_0)^{2n}\,.$$

Αφού $f^{(2n)}(x_0) > 0$ και η $f^{(2n)}$ είναι συνεχής, θα υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f^{(2n)}(\xi) > 0$, για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$ με $|\xi - x_0| < \delta$. Επομένως

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}(x - x_0)^{2n} > 0\,,$$

για κάθε $|x - x_0| < \delta$. Άρα η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό ελάχιστο. □

Ασκηση 5. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με*

$$f(x) \geq 0\,, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}\,.$$

Υποθέτουμε ότι

$$f''(x) \leq 0\,, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}\,.$$

Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.
(Υπόδειξη: να χρησιμοποιήσετε το Θεώρημα Taylor.)

Λύση. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Από το Θεώρημα Taylor έχουμε ότι για κάθε $h \in \mathbb{R}$, υπάρχει ξ μεταξύ του x και του $x + h$ τέτοιο ώστε

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(\xi)}{2!}h^2\,.$$

Χρησιμοποιώντας την υπόθεση έχουμε ότι

$$0 \leq f(x + h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(\xi)}{2!}h^2 \leq f(x) + f'(x)h\,,$$

δηλαδή

$$f(x) + f'(x)h \geq 0, \text{ για κάθε } h \in \mathbb{R}\,.$$

Αυτό όμως σημαίνει ότι $f'(x) = 0$ (γιατί;) και αφού αυτό ισχύει για οποιοδήποτε $x \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση f είναι σταθερή.
Παρατήρηση: η υπόθεση $f''(x) \leq 0$ μας λέει ότι η f είναι κοίλη. Κάντε ένα πρόχειρο σχήμα για να δείτε ότι αυτό μαζί με το ότι η f έχει μη-αρνητικές τιμές καθιστά το συμπέρασμα απολύτως αναμενόμενο. □