ΣΝΜΜ
Μαθηματική Ανάλυση
Λύσεις του 10ου φυλλαδίου ασκήσεων

Ασκηση 1. *(Βέλτιστη γραμμική προσέγγιση)*
Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in (a, b)$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε η συνάρτηση

$$g(x) = f(x_0) + \lambda(x - x_0)$$

να είναι μία 'καλή' προσέγγιση της f κοντά στο x_0, με την έννοια ότι

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = 0 .$$

Δείξτε ότι σε αυτή την περίπτωση η f είναι διαφορίσιμη στο x_0 και μάλιστα $f'(x_0) = \lambda$. (Επομένως η γραμμικοποίηση $L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ είναι η μοναδική 'καλή' γραμμική προσέγγιση της f κοντά στο x_0.)

Λύση. Έχουμε ότι

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} [\frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} + \lambda] = \lambda$$

και συνεπώς η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $f'(x_0) = \lambda$. □

Ασκηση 2. *Χρησιμοποιώντας γραμμικοποίηση να υπολογίσετε μία προσεγγιστική τιμή για τους αριθμούς $(1,0002)^{50}$ και $\sqrt[3]{1,009}$.*

Λύση. (ι) Η γραμμικοποίηση της $f(x) = (1 + x)^{50}$, γύρω από το $x_0 = 0$ είναι

$$L(x) = 1 + 50x .$$

Επομένως

$$(1,0002)^{50} = f(0,0002) \approx L(0,0002) = 1,01 .$$

(ιι) Αντίστοιχα η γραμμικοποίηση της $f(x) = (1+x)^{1/3}$, γύρω από το $x_0 = 0$ είναι

$$L(x) = 1 + 1/3x .$$

Επομένως

$$\sqrt[3]{1,009} = f(0,009) \approx L(0,009) = 1,003 .$$

□

Ασκηση 3. *Χρησιμοποιώντας γραμμικοποίηση να υπολογίσετε μία προσεγγιστική τιμή για τον αριθμό $\tan 42°$.*

Λύση. Γραμμικοποιούμε την $f(x) = \tan x$ στο $x_0 = \frac{\pi}{4}$ και έχουμε

$$L(x) = f(\frac{\pi}{4}) + f'(\frac{\pi}{4})(x - \frac{\pi}{4}) .$$

Η γωνία 42° σε rad είναι $\frac{7\pi}{30}$. Οπότε

$$\tan 42^\circ \approx L(\frac{7\pi}{30}) = 1 + 2(-\frac{\pi}{60}) = \frac{30-\pi}{30}\,.$$

$\square$

Στις επόμενες δύο ασκήσεις να χρησιμοποιήσετε το Θεώρημα Taylor.

Ασκηση 4. *Τι τάξης πολυώνυμο Taylor κέντρου* 0 *χρειάζεται, ώστε να προσεγγίσουμε το* $\sin 1$ *με σφάλμα (κατά απόλυτη τιμή) μικρότερο από* $0,001$;

Λύση. Το σφάλμα στον Θεώρημα του Taylor, για την προσέγγιση του $\sin 1$ από πολυώνυμο n-τάξης κέντρου 0, είναι

$$R_n(1) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,,$$

για κάποιο $\xi \in (0,1)$, όπου το $f^{(n+1)}(\xi)$ είναι $\sin\xi$ ή $\cos\xi$. Συνεπώς

$$|R_n(1)| \leq \frac{1}{(n+1)!}\,.$$

Με δοκιμές βρίσκουμε ότι η ζητούμενη προσέγγιση μπορεί να επιτευχθεί για $n = 6$. $\square$

Ασκηση 5. *Έστω ότι η συνάρτηση* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *είναι δύο φορές διαφορίσιμη και* $f(0) = f'(0) = 0$. *Υποθέτουμε ότι*

$$|f''(x)| \leq 1\,, \text{ αν } |x| \leq 1\,.$$

Δείξτε ότι

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2}\,, \text{ αν } |x| \leq 1\,.$$

Λύση. Σύμφωνα με το Θεώρημα Taylor, έχουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$, υπάρχει ξ μεταξύ του x και του 0, τέτοιο ώστε

$$f(x) = \frac{f''(\xi)}{2}x^2\,.$$

Όμως, από υπόθεση, $|f''(\xi)| \leq 1$ και επομένως αν επιπλέον υποθέσουμε ότι $|x| \leq 1$ παίρνουμε ότι

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2}\,.$$

$\square$