

ΣΝΜΜ
Μαθηματική Ανάλυση
9ο φυλλάδιο ασκήσεων

Άσκηση 1. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{3}x + 2.$$

Δείξτε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και στη συνέχεια υπολογίστε το $(f^{-1})'(2)$.

Άσκηση 2. Έστω ότι η συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$, διαφορίσιμη στο (a, b) και $f(a) = f(b) = 0$. Δείξτε ότι για κάθε $\gamma \in \mathbb{R}$, υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$\gamma f(x_0) + f'(x_0) = 0.$$

Άσκηση 3. Να δείξετε ότι $\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = 2 \arctan x$, για κάθε $x \geq 0$.

Άσκηση 4. Δείξτε ότι

$$|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση 5. Θα λέμε ότι η συνάρτηση $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι τοπικά σταθερή αν για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ υπάρχει $\delta > 0$, που πιθανώς εξαρτάται από το x , τέτοιο ώστε η f να είναι σταθερή στο $(x - \delta, x + \delta)$. Δείξτε ότι αν η f είναι τοπικά σταθερή, τότε είναι σταθερή.