

ΣΝΜΜ  
Μαθηματική Ανάλυση  
8ο φυλλάδιο ασκήσεων

**Άσκηση 1.** Δείξτε ότι αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \beta$ , τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \alpha + \beta .$$

**Άσκηση 2** (Η αρχή της μεταφοράς). Να δείξετε ότι μία συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$  αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία  $(x_n)$  στο πεδίο ορισμού της  $f$  με  $\lim x_n = x_0$ , ισχύει  $\lim f(x_n) = f(x_0)$ .

**Άσκηση 3.** Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση  $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής και  $f(q) = 0$ , για κάθε ρητό αριθμό  $q \in (\alpha, \beta)$ . Δείξτε ότι  $f(x) = 0$ , για κάθε  $x \in (\alpha, \beta)$ .

(Υπόδ: χρησιμοποιήστε την πυκνότητα των ρητών και την αρχή της μεταφοράς)

**Άσκηση 4.** Να δείξετε ότι δεν υπάρχει το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} .$$

(Υπόδειξη: να χρησιμοποιήσετε την αρχή της μεταφοράς)

**Άσκηση 5.** Έστω συνάρτηση  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής στο  $x_0$ . Δείξτε ότι αν  $f(x_0) > 0$ , τότε υπάρχει  $\delta > 0$ , τέτοιο ώστε για κάθε  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  να ισχύει ότι  $f(x) > 0$ .