

ΣΝΜΜ
Ασκήσεις στη Μαθηματική Ανάλυση
7ου φυλλάδιο ασκήσεων

Ασκηση 1. Ελέγξτε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

$$(\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)(n+5)}, (\beta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{5n+7}.$$

Ασκηση 2. Έστω (α_n) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{2+n^2\alpha_n}$$

συγκλίνει.

Ασκηση 3. Έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνει.

(i) Δείξτε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $|\alpha_n| < 1$, για κάθε $n \geq n_0$.

(ii) Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$ συγκλίνει επίσης. Ισχύει το αντίστροφο;

(iii) Υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ συγκλίνει επίσης. Να δείξετε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n \text{ συγκλίνει απόλυτα.}$$

(Υπόδειξη: για το (i) να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό του ορίου ακολουθίας και για τα (ii), (iii) το κριτήριο σύγκρισης.)

Ασκηση 4. Ελέγξτε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

$$(\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!n!}{(3n)!}, (\beta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{4^n}, (\gamma) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!}.$$

Ασκηση 5. Δίνεται η ακολουθία (a_n) με αναδρομικό τύπο

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2+a_n^2}, a_1 > 0.$$

Βρείτε τα όρια των ακολουθιών (a_n) , $(\frac{a_{n+1}}{a_n})$ και μελετήστε τη σύγκλιση των σειρών

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n \text{ και } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (a_n + \frac{1}{n}).$$