

ΣΝΜΜ
Ασκήσεις στη Μαθηματική Ανάλυση
6ο φυλλάδιο ασκήσεων

Άσκηση 1. Έστω (α_n) ακολουθία μη αρνητικών αριθμών και υποθέτουμε ότι $\lim \alpha_n = \alpha > 0$. Να δείξετε ότι $\lim \sqrt[n]{\alpha_n} = 1$.

Άσκηση 2. (i) Έστω (α_n) ακολουθία μη-μηδενικών αριθμών με

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right| = \rho < 1.$$

Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0.$$

(ii) (Ένα πολύ σημαντικό όριο) Δείξτε ότι, για κάθε πραγματικό αριθμό x , ισχύει ότι

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

Άσκηση 3. Να υπολογίσετε τα όρια:

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$,

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} n\lambda^n$, όπου $|\lambda| < 1$,

(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

Άσκηση 4. Να προσδιορίσετε τα $x \in \mathbb{R}$, για τα οποία συγκλίνουν οι σειρές

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

και

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

Στη συνέχεια, για αυτά τα x , να βρείτε τα αθροίσματά τους.

Άσκηση 5. Αποδείξτε ότι αν $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = \beta$ και $\alpha_n = \beta_n - \beta_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \beta_1 - \beta.$$