ΣΝΜΜ
Ασκήσεις στην Μαθηματική Ανάλυση
(Φυλ. 5)

Ασκηση 1 (Τρίγωνο του Pascal). *Να δείξετε ότι για κάθε* $n, k \in \mathbb{N}$ *με* $0 \leq k \leq n$ *ισχύει*

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

Ασκηση 2. *Να αποδείξετε ότι για κάθε* $n, k \in \mathbb{N}$ *με* $0 \leq k \leq n$ *ισχύει*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n\,.$$

Ασκηση 3. *Να δείξετε ότι αν* $\lim \dfrac{a_n}{n^2} = 1$, *τότε υπάρχει* $n_0 \in \mathbb{N}$, *τέτοιο ώστε* $a_n > \dfrac{n^2}{3}$, *για κάθε* $n \geq n_0$.

Ασκηση 4. *(ι) Έστω* (α_n) *ακολουθία πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|} < 1\,.$$

Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0\,.$$

(ιι) Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{2n+1}{3n+2})^n = 0\,.$$

Ασκηση 5. *Έστω* (α_n) *ακολουθία μή αρνητικών αριθμών και υποθέτουμε ότι* $\lim \alpha_n = \alpha > 0$. *Να δείξετε ότι* $\lim \sqrt[n]{\alpha_n} = 1$.

Ασκηση 6. *Δίνεται η ακολουθία* (α_n) *που ορίζεται με τον αναδρομικό τύπο*

$$\alpha_1 = 1\,,\ \alpha_{n+1} = \sqrt{3\alpha_n}\,.$$

(ι) Δείξτε, χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, ότι η (α_n) *είναι άνω φραγμένη από τον αριθμό 3.*

(ιι) Δείξτε ότι η (α_n) *είναι αύξουσα.*

(ιιι) Εξηγήστε το λόγο για τον οποίο συγκλίνει η (α_n) *και στη συνέχεια υπολογίστε το όριο της.*