

ΣΝΜΜ
Ασκήσεις στην Μαθηματική Ανάλυση
(Φυλ. 2)

Άσκηση 1. Προσδιορίστε το *supremum* των παρακάτω συνόλων

(i) $\left\{ \frac{n}{2n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$,

(ii) $\left\{ \frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{N} \text{ και } n + m \leq 10 \right\}$.

(Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.)

Άσκηση 2. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή ή λανθασμένη κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις:

(i) Ένα πεπερασμένο υποσύνολο του \mathbb{R} περιέχει πάντα το *supremum* του.

(ii) Αν $x < M$ για κάθε στοιχείο του συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$, τότε $\sup A < M$.

(iii) Αν A και B είναι υποσύνολα του \mathbb{R} και ισχύει $\alpha < \beta$, για κάθε $\alpha \in A$ και $\beta \in B$, τότε $\sup A < \inf B$.

(iv) Αν $\sup A \leq \sup B$, τότε υπάρχει στοιχείο του B που είναι άνω φράγμα του συνόλου A .

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Άσκηση 3. Έστω A, B μη κενά άνω φραγμένα σύνολα πραγματικών αριθμών και θέτουμε

$$A + B = \{ \alpha + \beta : \alpha \in A \text{ και } \beta \in B \}.$$

Να αποδείξετε ότι

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

Άσκηση 4. (α) Έστω $A \neq \emptyset$ κάτω φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{R} . Δείξτε ότι $\alpha = \inf A$ αν και μόνο αν

(i) το α είναι κάτω φράγμα του A και

(ii) για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $x < \alpha + \epsilon$.

(β) Να αποδείξετε ότι $\inf \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} = 0$.

(Υπόδειξη: για το (β) να χρησιμοποιήσετε το (α) και την Αρχιμήδεια ιδιότητα)

Άσκηση 5. Με $\inf A$ συμβολίζουμε το μέγιστο κάτω φράγμα (*infimum*) ενός υποσυνόλου A του \mathbb{R} .

(α) Θέτουμε

$$-A = \{ -\alpha : \alpha \in A \}.$$

Να δείξετε ότι $\sup(-A) = -\inf A$.

(β) Δείξτε, χρησιμοποιώντας το αξίωμα πληρότητας, ότι κάθε κάτω φραγμένο, μη κενό υποσύνολο του \mathbb{R} έχει *infimum*.