

ΣΝΜΜ  
Ασκήσεις στη Μαθηματική Ανάλυση  
(11ο φυλλάδιο ασκήσεων)

**Ασκηση 1.** Να δείξετε ότι

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}, \text{ για κάθε } x > 0.$$

**Ασκηση 2.** Να δείξετε ότι  $\sin x \geq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ , για κάθε  $x \in [-\pi, 0]$ .

**Ασκηση 3.** Να δείξετε ότι

$$0 < x - \ln(1+x) < \frac{x^2}{2}, \text{ για κάθε } x > 0.$$

**Ασκηση 4.** Έστω ότι η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι απεριόριστα διαφορίσιμη και

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0,$$

για κάποιο  $x_0 \in \mathbb{R}$  και κάποιο  $n \in \mathbb{N}$ . Δείξτε ότι αν  $f^{(2n)}(x_0) > 0$ , τότε η  $f$  παρουσιάζει στο  $x_0$  τοπικό ελάχιστο.

**Ασκηση 5.** Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με

$$f(x) \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Υποθέτουμε ότι

$$f''(x) \leq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι η  $f$  είναι σταθερή.

(Υπόδειξη: να χρησιμοποιήσετε το Θεώρημα Taylor.)