ΣΝΜΜ
Μαθηματική Ανάλυση
10ο φυλλάδιο ασκήσεων

Ασκηση 1. *(Βέλτιστη γραμμική προσέγγιση)*
Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *και* $x_0 \in (a,b)$. *Υποθέτουμε ότι υπάρχει* $\lambda \in \mathbb{R}$, *τέτοιο ώστε η συνάρτηση*

$$g(x) = f(x_0) + \lambda(x - x_0)$$

να είναι μία 'καλή' προσέγγιση της f *κοντά στο* x_0, *με την έννοια ότι*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = 0\,.$$

Δείξτε ότι σε αυτή την περίπτωση η f *είναι διαφορίσιμη στο* x_0 *και μάλιστα* $f'(x_0) = \lambda$. *(Επομένως η γραμμικοποίηση* $L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ *είναι η μοναδική 'καλή' γραμμική προσέγγιση της* f *κοντά στο* x_0.*)*

Ασκηση 2. *Χρησιμοποιώντας γραμμικοποίηση να υπολογίσετε μία προσεγγιστική τιμή για τους αριθμούς* $(1,0002)^{50}$ *και* $\sqrt[3]{1,009}$.

Ασκηση 3. *Χρησιμοποιώντας γραμμικοποίηση να υπολογίσετε μία προσεγγιστική τιμή για τον αριθμό* $\tan 42^\circ$.

Στις επόμενες δύο ασκήσεις να χρησιμοποιήσετε το Θεώρημα Taylor.

Ασκηση 4. *Τι τάξης πολυώνυμο Taylor κέντρου* 0 *χρειάζεται, ώστε να προσεγγίσουμε το* $\sin 1$ *με σφάλμα (κατά απόλυτη τιμή) μικρότερο από* $0,001$;

Ασκηση 5. *Έστω ότι η συνάρτηση* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *είναι δύο φορές διαφορίσιμη και* $f(0) = f'(0) = 0$. *Υποθέτουμε ότι*

$$|f''(x)| \leq 1\,,\ \text{αν } |x| \leq 1\,.$$

Δείξτε ότι

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2}\,,\ \text{αν } |x| \leq 1\,.$$