

## 1η Σειρά Ασκήσεων

### A. Εξοικείωση με την χρήση της Βιβλιοθήκης ή του Διαδικτύου

(π.χ. [www.wikipedia.org](http://www.wikipedia.org))

Γράψτε λίγα λόγια (το πολύ 5 γραμμές) για τον καθένα από τους: Leibniz, Euler, Gauss, Cantor, Hilbert, Gödel, Turing, Specker, Fibonacci, Babbage, Hollerith, von Neumann, Dijkstra, Sifakis. Απαγορεύεται να ρωτήσετε άλλους, δια ζώσης ή με e-mail.

### B. Παράταξη

Αθλητές παρατάσσονται σε  $N$  στήλες και  $M$  γραμμές. Από κάθε στήλη διαλέγουμε τον ψηλότερο και από αυτούς επιλέγουμε τον πιο κοντό, τον οποίο ονομάζουμε  $A$ . Από κάθε γραμμή πάλι (στην αρχική παράταξη) διαλέγουμε τον κοντύτερο και από αυτούς τον πιο ψηλό, τον οποίο ονομάζουμε  $B$ .

Ποια σχέση ύψους υπάρχει ανάμεσα στο  $A$  και στο  $B$  (Απόδειξη);

### Γ. Διαγωνιοποίηση

**Ορισμός:** Ένα σύνολο λέγεται αριθμήσιμο εάν μπορούμε να το αντιστοιχίσουμε αμφιμονοσήμαντα με τους φυσικούς αριθμούς  $\mathbb{N}$ .

**Ισχυρισμός:** Το σύνολο των συναρτήσεων  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  δεν είναι αριθμήσιμο.

Ιδέα της μεθόδου της διαγωνιοποίησης: Θεωρούμε ένα τετραγωνικό πίνακα με στοιχεία 0 ή 1. Ονομάζουμε  $d$  τη διαγώνιο και  $D$  ένα διάνυσμα του οποίου κάθε στοιχείο είναι  $1-d_i$ . Τότε το  $D$  είναι διαφορετικό από κάθε σειρά του πίνακα (γιατί;). Αυτή η ιδέα λειτουργεί και για πίνακες απείρου μεγέθους.

**Απόδειξη του ισχυρισμού:** Έστω ότι υπάρχει απαρίθμηση όλων των συναρτήσεων  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ :

$f_0: f_0(0), f_0(1), f_0(2), \dots$

$f_1: f_1(0), f_1(1), f_1(2), \dots$

$f_2: f_2(0), f_2(1), f_2(2), \dots$

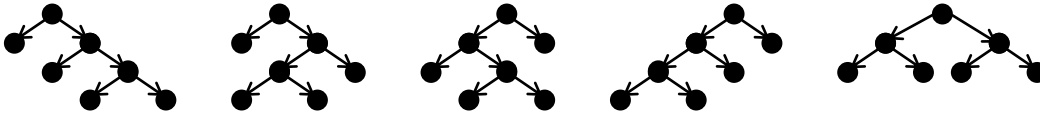
.....

Η συνάρτηση  $g(n)=f_n(n)+1$  είναι διαφορετική από κάθε  $f_i$  (άτοπο).

Να δείξετε ότι ούτε το σύνολο των γνησίως αυξουσών συναρτήσεων  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  δεν είναι αριθμήσιμο.

### Δ. Δυαδικά δέντρα.

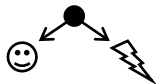
Ιδού όλα τα δυαδικά δέντρα (χωρίς εκφυλισμένους κόμβους) με 4 φύλλα:



Επαγωγικός ορισμός:

α) ● είναι δυαδικό δέντρο

β) εάν ☺ και ⚡ είναι δυαδικά δέντρα τότε είναι δυαδικό δέντρο και αυτό:



α) Ζωγραφίστε όλα τα δυαδικά δέντρα με 2, 3 και 5 φύλλα.

β) Πόσα δυαδικά δέντρα υπάρχουν με 6 φύλλα που έχουν 2 φύλλα αριστερά και 4 φύλλα δεξιά;

γ) Πόσα δυαδικά δέντρα υπάρχουν με 6 φύλλα;

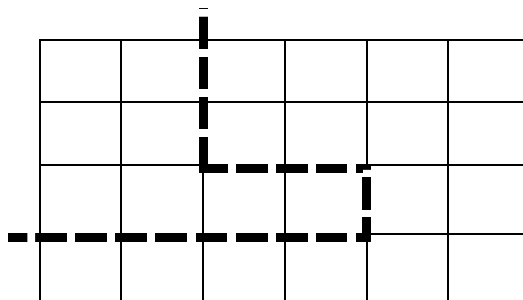
δ) Πόσα δυαδικά δέντρα υπάρχουν με  $n$  φύλλα; (είναι αρκετό να εκφράσετε τον αριθμό  $a_n$  των δυαδικών δέντρων με  $n$  φύλλα με ένα τύπο που χρησιμοποιεί τους  $a_1 \dots a_{n-1}$ . Αριθμοί CATALAN.)

ε) Προαιρετικά: Να εκφράσετε το  $a_n$  με κλειστό τύπο, δηλαδή χωρίς χρήση των  $a_1 \dots a_{n-1}$ .

### Ε. Το πρόβλημα της Ελβετικής Σοκολάτας.

Έχουμε μία πλάκα ελβετικής σοκολάτας διαστάσεων  $4 \times 6$ . Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός φορών που πρέπει να κόψουμε τη σοκολάτα, ώστε να καταλήξουμε σε 24 μικρά κομματάκια διαστάσεων  $1 \times 1$ ; (αποδείξτε τον ισχυρισμό σας!)

Οι τομές που κάνουμε στη σοκολάτα μπορούν να έχουν σχήμα οποιασδήποτε τεθλασμένης γραμμής η οποία ξεκινάει από ένα σημείο της περιμέτρου του κομματιού και καταλήγει σε κάποιο άλλο σημείο της περιμέτρου. Η γραμμή δεν μπορεί όμως να τέμνει τον εαυτό της. Κάθε φορά που κόβουμε, απομακρύνουμε μεταξύ τους τα κομμάτια που προκύπτουν και εν συνεχεία κόβουμε το καθένα ξεχωριστά.



## ΣΤ. Αριθμητική με «ανάποδους» αριθμούς (Πολλαπλάσια Specker).

Ορίζουμε τον *ανάποδο* ενός αριθμού  $XYZW$  ως τον αριθμό  $WZYX$  που αποτελείται από τα ίδια ψηφία σε αντίστροφη σειρά.

α) Πόσους μη-τετριμμένους τετραψήφιους αριθμούς μπορείτε να βρείτε με την ιδιότητα να διαιρούνται ακριβώς από τον *ανάποδό* τους; Παραδείγματα τετριμμένων αριθμών: οι παλινδρομικοί (π.χ. ο 1991 προφανώς διαιρείται από τον *ανάποδό* του που είναι ο ίδιος ο 1991), όσοι αρχίζουν από '0' (π.χ. ο 0237 δεν θεωρείται τετραψήφιος) και όσοι τελειώνουν σε '0' (γιατί ο *ανάποδός* τους δεν είναι τετραψήφιος).

β) Έστω ένας μη-τετριμμένος αριθμός  $XYZW$  που διαιρείται από τον *ανάποδό* του (δηλαδή ένας από αυτούς που δώσατε ως λύση στο ερώτημα α — θεωρήστε ότι τα  $x, y, z$  και  $w$  είναι στο εξής συγκεκριμένα δεκαδικά ψηφία). Αποδείξτε ότι και ο  $xy9ZW$  διαιρείται από τον *ανάποδό* του. Στη συνέχεια, αποδείξτε ότι όσα '9' και αν βάλουμε στη μέση, ο  $xy9K9ZW$  διαιρείται από τον *ανάποδό* του (θα συμβολίζουμε με  $9^*$  οποιαδήποτε επανάληψη του ψηφίου '9', δηλαδή μηδέν ή περισσότερες φορές, άρα  $xy9^*ZW$ ). Αποδείξτε, τέλος, ότι οι μοναδικοί μη-τετριμμένοι αριθμοί που διαιρούνται από τον *ανάποδό* τους και έχουν τα δύο πρώτα ψηφία τους  $X, Y$  και τα δύο τελευταία ψηφία τους  $Z, W$  είναι της μορφής  $xy9^*zw0^*xy9^*zw0^*\dots0^*xy9^*ZW$  (συμβολικά  $xy9^*zw(0^*xy9^*zw)^*$  με regular expression).

γ) Υπάρχουν άλλοι μη-τετριμμένοι αριθμοί με περισσότερα από 4 ψηφία που διαιρούνται από τον *ανάποδό* τους, εκτός από αυτούς που περιγράφονται στο ερώτημα β;

δ) Τι αλλάζει αν θεωρήσουμε τα παραπάνω ερωτήματα για αριθμούς όχι δεκαδικούς αλλά γραμμένους σε άλλη βάση;

Υπόμνημα: † σημαίνει «δύσκολο», †† σημαίνει «αν το λύσετε, μιλήστε με το Ζάχο»...

► Να παραδοθεί στον υπεύθυνο του εργαστηρίου σας μέχρι την εβδομάδα 14/10/2024 – 18/10/2024

### 1. Εξάσκηση στην χρήση του editor *vi* και του compiler της C++.

Χρησιμοποιήστε τον editor για να γράψετε (π.χ. *edit hello1a.cpp*), μετά τον compiler για να μεταφράσετε (π.χ. *c++ hello1a.cpp*) και μετά να εκτελέσετε (π.χ. *run hello1a.exec*) τα ακόλουθα προγράμματα:

1a	<pre>#include "pzhhelp"  PROGRAM {     WRITELN("hello world"); }</pre>	1b	<pre>#include "pzhhelp"  PROGRAM {     WRITELN("hello", "world"); }</pre>
1c	<pre>#include "pzhhelp"  PROGRAM {     WRITE("hello "); WRITELN("world"); }</pre>	1d	<pre>#include "pzhhelp"  PROGRAM {     WRITE("hello", "world"); WRITELN(); }</pre>
2	<pre>#include "pzhhelp"  void hello () {     WRITELN("hello world"); }  PROGRAM {     hello(); hello(); hello(); hello(); }</pre>	3	<pre>#include "pzhhelp"  void hello () {     WRITELN("hello world"); }  PROGRAM {     for (int i = 0; i &lt; 20; i++) hello(); }</pre>
4	<pre>#include "pzhhelp"  const int n = 20; int i;  void num_hello () {     WRITELN(i, "hello world"); }  PROGRAM {     for (i = 1; i &lt;= n; i++) num_hello(); }</pre>	5	<pre>#include "pzhhelp"  void hello () {     WRITELN("hello world"); }  PROGRAM {     WRITE("Give number of greetings",         "then press &lt;enter&gt;: ");     int n = READ_INT();     for (int i = 0; i &lt; n ; i++) hello(); }</pre>
6	<pre>#include "pzhhelp"  void hello () {     WRITELN("hello world"); }  PROGRAM {     WRITE("Give number of greetings then press &lt;enter&gt;: ");     int n = READ_INT();     if (n &lt; 0) WRITELN("The number", n, "is negative");     else     for (int i = 0; i &lt; n; i++) hello(); }</pre>		

► Τα προγράμματα 1a-4 να υποβληθούν στο αυτόματο σύστημα υποβολής και ελέγχου την εβδομάδα 30/9/2024 – 4/10/2024

Τα προγράμματα 5-6 να επιδειχθούν στον υπεύθυνο του εργαστηρίου μέχρι την εβδομάδα 30/9/2024 – 4/10/2024