Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωσης (2023–24)
Ασκήσεις – Φυλλάδιο 4

(Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις. Ημερομηνία παράδοσης: 14 Ιανουαρίου 2024)

1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f, f_n : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε

$$\int_X |f_n - f|\, d\mu \leqslant \frac{1}{2^n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι $f_n \to f$ μ-σχεδόν παντού.

2. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας και $f : X \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με $\int_X f\, d\mu \geqslant \alpha$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $\mu(\{x \in X : f(x) \geqslant \alpha\}) > 0$.

3. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια και αιτιολογήστε τον υπολογισμό τους:

(α) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^\infty (1 + (x/n))^{-n} \sin(x/n)\, dx$.

(β) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 (1 + nx^2)(1 + x^2)^{-n}\, dx$.

4. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υπολογίστε το

$$\int_{\mathbb{R}} f(nx)\, d\lambda(x)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Στη συνέχεια αποδείξτε για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} n^{-\alpha} |f(nx)|\, d\lambda(x) < +\infty$$

και συμπεράνατε ότι $n^{-\alpha} f(nx) \to 0$ λ-σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$.

5. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$. Υπολογίστε το

$$\lim_{t\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f(x+t) + f(x)|\, d\lambda(x).$$

[*Υπόδειξη:* Προσεγγίστε την f με συνεχείς συναρτήσεις που έχουν συμπαγή φορέα.]

6. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου και μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

Αν $\gamma_n = \int_X |f|^n d\mu$ αποδείξτε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} = \|f\|_\infty$.
[*Υπόδειξη.* Για το δεύτερο ερώτημα ίσως βοηθήσει να χρησιμοποιήσετε την ανισότητα Hölder ξεκινώντας από το ολοκλήρωμα γ_n.]

7. Έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $0 < \lambda(E) < \infty$. Έστω $f_n \in L^1(E)$ που ικανοποιούν τα εξής:

(α) Υπάρχουν $1 < p < \infty$ και $\alpha > 0$ τέτοια ώστε $\|f_n\|_p \leqslant \alpha$ για κάθε $n \geqslant 1$.

(β) Υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση f στο E τέτοια ώστε $f_n \to f$ σχεδόν παντού.

Αποδείξτε ότι $f \in L^1(E)$ και $\|f_n - f\|_1 \to 0$.

8. (α) Έστω $g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι

$$\int g \, d\lambda = \int_0^\infty \lambda(\{x : g(x) > t\}) \, dt.$$

[*Υπόδειξη:* Δείξτε το πρώτα στην περίπτωση όπου η g είναι μη αρνητική, απλή ολοκληρώσιμη συνάρτηση.]

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: υπάρχει $c_1 > 0$ ώστε, για κάθε $t > 0$,

$$\lambda(\{x : |f(x)| > t\}) \leq \frac{c_1}{t^2}.$$

Αποδείξτε ότι: υπάρχει $c_2 > 0$ ώστε, για κάθε μετρήσιμο E με $0 < \lambda(E) < \infty$,

$$\int_E |f| \, d\lambda \leq c_2 \sqrt{\lambda(E)}.$$

9. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας. Αποδείξτε ότι αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή και $g : X \to (a, b)$, $g \in L^1(\mu)$ τότε

$$F\Big(\int_X g \, d\mu\Big) \leqslant \int_X F \circ g \, d\mu.$$

[*Υπόδειξη:* Θεωρήστε την $F(g(x)) - F(t_0) \geqslant F'(t_0)(g(x) - t_0)$ όπου $t_0 = \int_X g \, d\mu$ και ολοκληρώστε.]

10. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας και $f \in L^p(\mu)$ για κάποιον $p > 0$. Αποδείξτε ότι:

(i) $f \in L^q(\mu)$ για κάθε $0 < q < p$.

(ii) $\ln \|f\|_q \geqslant \int_X \ln |f| \, d\mu$ για κάθε $0 < q < p$. [*Υπόδειξη:* Χρησιμοποιήστε την προηγούμενη άσκηση για την $F(t) = e^t$.]

(iii) $(\int_X |f|^q d\mu - 1)/q \geqslant \ln \|f\|_q$ και $(\int_X |f|^q d\mu - 1)/q \to \int_X \ln |f| \, d\mu$ όταν $q \to 0^+$.

(iv) $\lim_{q \to 0^+} \|f\|_q = \exp(\int_X \ln |f| \, d\mu)$.