Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωσης (2023–24)
Ασκήσεις – Φυλλάδιο 3

(Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις. Ημερομηνία παράδοσης: 21 Δεκεμβρίου 2023)

1. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση και $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ακόλουθη ιδιότητα: αν $N \subseteq \mathbb{R}$ και $\lambda(N) = 0$ τότε το $\phi^{-1}(N)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο σύνολο. Αποδείξτε ότι η $f \circ \phi$ είναι Lebesgue μετρήσιμη.

2. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ ακολουθία ξένων ανά δύο υποσυνόλων του X τέτοια ώστε $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Θεωρούμε την οικογένεια συνόλων $\mathcal{S} = \left\{\bigcup_{k\in A} E_k : A \subseteq \mathbb{N}\right\}$. Θεωρήστε γνωστό ότι η $\mathcal{S}$ είναι σ-άλγεβρα στο X. Αποδείξτε ότι μια συνάρτηση $g : X \to \mathbb{R}$ είναι $\mathcal{S}$-μετρήσιμη αν και μόνο αν η $g\big|_{E_k}$ είναι σταθερή για κάθε $k = 1, 2, \ldots$

3. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε το σύνολο $D = \{x \in \mathbb{R} : \text{ η } f \text{ είναι ασυνεχής στο } x\}$ να είναι αριθμήσιμο. Αποδείξτε ότι η f είναι Borel μετρήσιμη.

4. Αποδείξτε ότι η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμη αν και μόνο αν υπάρχει Borel μετρήσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\lambda(\{f \neq g\}) = 0$.

5. Έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι:

(α) Υπάρχει ακολουθία $\{E_n\}_{n=0}^{\infty}$ ξένων ανά δύο Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του E ώστε $E = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$ και $0 \leqslant \lambda(E_n) \leqslant 2$ για κάθε $n \geqslant 0$.

(β) Υπάρχει ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in E$.

6. Έστω $f_n : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι, για κάποιους $\alpha_n > 0$, ισχύουν οι

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x) d\lambda(x) = \alpha_n^2 \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty.$$

Αποδείξτε ότι:

(α) Αν $E_n = \{x \in \mathbb{R} : f_n(x) > \alpha_n\}$ τότε $\lim\limits_{N\to\infty} \lambda\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} E_n\right) = 0$.

(β) Η ακολουθία $\frac{f_n(x)}{\alpha_n}$ είναι φραγμένη σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

7. (α) Έστω $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε

$$\int_{[0,1]} |f_n|^4 \, d\lambda \leqslant \frac{1}{n^2}$$

για κάθε $n \geqslant 1$. Αποδείξτε ότι $f_n \to 0$ σχεδόν παντού. [*Υπόδειξη:* Θεώρημα Beppo Levi.]

(β) Έστω $f_n : [0, 1] \to [0, \infty)$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f_n \to 0$ κατά σημείο και

$$\int_{[0,1]} f_n \, d\lambda = 1$$

για κάθε $n \geqslant 1$. Αν $g := \sup_n f_n$, αποδείξτε ότι

$$\int_{[0,1]} g \, d\lambda = +\infty.$$

8. Έστω $k \in \{1, \dots, n\}$ και $E_1, \dots, E_n$ Lebesgue μετρήσιμα υποσύνολα του $[0,1]$. Αν $\lambda(E_1) + \cdots + \lambda(E_n) \geqslant k$, αποδείξτε ότι υπάρχουν δείκτες $i_1 < \cdots < i_k$ στο $\{1, \dots, n\}$ τέτοιοι ώστε

$$E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_k} \neq \varnothing.$$

[*Υπόδειξη:* $\lambda(E_j) = \int_{[0,1]} \chi_{E_j} \, d\lambda$.]

9. Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις με την ιδιότητα

$$\int_E |f_n| \, d\lambda \leqslant \sqrt{\lambda(E)}$$

για κάθε $n \geqslant 1$ και κάθε μετρήσιμο υποσύνολο E του $[0,1]$. Αν $f_n \to f$ κατά σημείο, αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και ότι

$$\int_0^1 f_n \, d\lambda \to \int_0^1 f \, d\lambda.$$

[*Υπόδειξη:* Ίσως χρειαστείτε το θεώρημα Egorov.]

10. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $\int_X |f_n - f| \, d\mu \longrightarrow 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία (f_{k_n}) της (f_n) τέτοια ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_{k_n} - f| \, d\mu \leqslant 1$$

και από αυτό συμπεράνατε ότι $f_{k_n} \longrightarrow f$ σχεδόν παντού.