Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωσης (2023–24)
Ασκήσεις – Φυλλάδιο 2

(Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις. Ημερομηνία παράδοσης: 21 Νοεμβρίου 2023)

1. (α) Έστω μ^* εξωτερικό μέτρο στο X. Αν $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια αύξουσα ακολουθία μ^*–μετρήσιμων υποσυνόλων του X, αποδείξτε ότι για κάθε $E \subseteq X$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \mu^*(A_n \cap E) = \mu^*\big(\cup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap E)\big).$$

(β) Σωστό ή λάθος; Αν $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία υποσυνόλων του $[0,1]$ τότε

$$\lim_{n\to\infty} \lambda^*(A_n) = \lambda^*\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big).$$

2. Έστω $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ μια άλγεβρα. Γράφουμε $\mathcal{A}_\sigma$ για την οικογένεια όλων των αριθμήσιμων ενώσεων στοιχείων της $\mathcal{A}$ και $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ για την οικογένεια όλων των αριθμήσιμων τομών στοιχείων της $\mathcal{A}_\sigma$. Έστω μ_0 ένα προμέτρο στην $\mathcal{A}$ και μ^* το αντίστοιχο εξωτερικό μέτρο. Αποδείξτε τα εξής.

(α) Για κάθε $E \subseteq X$ και κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $A \in \mathcal{A}_\sigma$ τέτοιο ώστε $E \subseteq A$ και $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(E) + \varepsilon$.

(β) Αν $\mu^*(E) < \infty$, τότε το E είναι μ^*-μετρήσιμο αν και μόνο αν υπάρχει $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ τέτοιο ώστε $E \subseteq B$ και $\mu^*(B \setminus E) = 0$.

(γ) Αν το μ_0 είναι σ-πεπερασμένο, τότε στο (β) δεν χρειάζεται να κάνουμε την υπόθεση $\mu^*(E) < \infty$.

3. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου με $\mu(X) < \infty$. Αν $A_n, A \in \mathcal{A}$ και $\mu(A_n \triangle A) \to 0$, αποδείξτε ότι $\mu(A_n) \to \mu(A)$.

4. Κατασκευάστε μέτρο μ στον $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ τέτοιο ώστε

$$\{\mu(E) : E \subseteq \mathbb{N}\} = [0,1].$$

5. Έστω Z υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(Z) = 0$. Αποδείξτε ότι το $\mathbb{R} \setminus Z$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Χρησιμοποιώντας αυτήν την παρατήρηση αποδείξτε ότι αν $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις και $\lambda(\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq g(x)\}) = 0$, τότε $f \equiv g$.

6. Έστω A και B δύο μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

(α) Υποθέτουμε ότι για κάθε $a < b$ στο $\mathbb{R}$ ισχύει $\lambda(A \cap (a,b)) \leqslant \frac{b-a}{2}$. Αποδείξτε ότι $\lambda(A) = 0$.

(β) Υποθέτουμε ότι $\lambda(B) = 1$. Αποδείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμο $C \subseteq B$ με $\lambda(C) = \frac{1}{2}$.

7. Εξετάστε αν καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(α) Υπάρχει κλειστό σύνολο $F \subset [0,1]$ το οποίο έχει μέτρο $\lambda(F) = \frac{1}{2}$ και δεν περιέχει κανέναν ρητό αριθμό.

(β) Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ και $\lambda(A) > 0$ τότε υπάρχουν $x, y \in A$ τέτοια ώστε $x - y \notin \mathbb{Q}$.

(γ) Κάθε συνεχής συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ απεικονίζει Lebesgue μετρήσιμα σύνολα σε Lebesgue μετρήσιμα σύνολα.

8. (α) Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(A) < \infty$. Αποδείξτε ότι για κάθε $B \subseteq \mathbb{R}$ με $A \subseteq B$ ισχύει

$$\lambda^*(B \setminus A) = \lambda^*(B) - \lambda(A).$$

(β) Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(A) + \lambda^*(B) < \infty$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν μετρήσιμα σύνολα E, F τέτοια ώστε $A \subseteq E$, $B \subseteq F$ και $\lambda(E \cap F) = 0$.

9. (α) Αποδείξτε ότι υπάρχει φραγμένο σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\lambda(F) \leqslant \lambda^*(A) - 1$ για κάθε κλειστό σύνολο $F \subseteq A$.

(β) Αποδείξτε ότι υπάρχει σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\lambda^*(G \setminus A) = \infty$ για κάθε ανοικτό σύνολο $G \supseteq A$.

10. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με φραγμένη παράγωγο: υπάρχει $\alpha > 0$ τέτοιος ώστε $|f'(x)| \leqslant \alpha$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) = 0$ ισχύει $\lambda(f(A)) = 0$.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) = 0$ ισχύει $\lambda(f(A)) = 0$.

[*Υπόδειξη:* Για κάθε $n, k \geqslant 1$ θεωρήστε τα σύνολα $B_n = \{x \in A : |f'(x)| < n\}$ και $B_{n,k} = \{x \in A : |f(y) - f(x)| \leqslant n|y - x| \text{ εάν } |y - x| < 1/k\}$.]