Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωσης (2023–24)
Ασκήσεις – Φυλλάδιο 1

(Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις. Ημερομηνία παράδοσης: 31 Οκτωβρίου 2023)

1. Έστω $X \neq \varnothing$ και $\mathcal{A}$ μια σ-άλγεβρα στο X. Θεωρούμε $A \subseteq X$ και ορίζουμε

$$\mathcal{F}_A = \{E \in \mathcal{A} : A \subseteq E \text{ ή } A \cap E = \varnothing\}.$$

Αποδείξτε ότι η $\mathcal{F}_A$ είναι σ-άλγεβρα.

2. (α) Έστω X μη κενό σύνολο και $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}_{n+1} \subseteq \cdots$ μια αύξουσα ακολουθία αλγεβρών στο X. Αποδείξτε ότι η οικογένεια $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ είναι άλγεβρα στο X.

(β) Έστω X μη κενό σύνολο και $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}_{n+1} \subseteq \cdots$ μια αύξουσα ακολουθία σ-αλγεβρών στο X. Είναι απαραίτητα σωστό ότι η οικογένεια $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ είναι σ-άλγεβρα στο X;

3. Έστω $\Delta = \{(q, q+1) : q \in \mathbb{Q}\}$. Αποδείξτε ότι $\sigma(\Delta) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

4. (α) Έστω $\mathcal{A}$ μια σ–άλγεβρα στο X και $f : X \to Y$. Αποδείξτε ότι η οικογένεια

$$\{B \subseteq Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$$

είναι σ–άλγεβρα στο Y.

(β) Έστω $\mathcal{C}$ μια σ–άλγεβρα στο Y και $\mathcal{E}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του Y για την οποία ισχύει $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{C}$. Αποδείξτε ότι αν $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ για κάθε $B \in \mathcal{E}$, τότε $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ για κάθε $B \in \mathcal{C}$.

(γ) Έστω (X, d) και (Y, τ) μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$ συνεχής. Αποδείξτε ότι: αν το B είναι Borel σύνολο στον Y, τότε το $f^{-1}(B)$ είναι Borel σύνολο στον X.

5. Εξηγήστε γιατί δεν υπάρχει χώρος μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ με την ιδιότητα

$$\{\mu(E) : E \in \mathcal{A}\} = [0, 1).$$

6. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας και $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ τέτοια ώστε $\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) > n - 1$. Αποδείξτε ότι

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) > 0.$$

7. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος πεπερασμένου μέτρου και (A_n) μια ακολουθία υποσυνόλων του X για την οποία υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\mu(A_n) \geqslant \delta$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $\mu(\limsup_n A_n) > 0$.

8. Έστω $\mathcal{F}$ μια άλγεβρα στο X και έστω μ ένα πεπερασμένο μέτρο στον $(X, \sigma(\mathcal{F}))$. Αποδείξτε ότι για κάθε $A \in \sigma(\mathcal{F})$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $F \in \mathcal{F}$ ώστε $\mu(A \triangle F) < \varepsilon$, όπου $A \triangle F = (A \setminus F) \cup (F \setminus A)$ είναι η συμμετρική διαφορά των A και F.

9. Έστω $\mathcal{A}$ μια σ–άλγεβρα στο μη κενό σύνολο X και $\mathcal{E}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X για την οποία ισχύει $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}$. Θεωρούμε δύο μέτρα μ και ν στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$ τέτοια ώστε $\mu(X) = \nu(X) < \infty$ και $\mu(E) = \nu(E)$ για κάθε $E \in \mathcal{E}$. Είναι απαραίτητα σωστό ότι $\mu = \nu$;

10. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου τέτοιος ώστε για κάθε $\varnothing \neq E \in \mathcal{A}$ να ισχύει $0 < \mu(E) < \infty$. Για κάθε $x \in X$ ορίζουμε

$$f(x) = \inf\{\mu(E) : E \in \mathcal{A}, x \in E\}.$$

Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in X$ υπάρχει μοναδικό σύνολο $A_x \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $x \in A_x$ και $\mu(A_x) = f(x)$. Αποδείξτε επίσης ότι αν $x, y \in X$ τότε είτε $A_x = A_y$ ή $A_x \cap A_y = \varnothing$.