Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή ΗΜΜΥ, Σχολή ΕΜΦΕ

Μαθηματική Λογική, ακαδ. έτος 2023-24

Επιμέλεια ασκήσεων: Γ. Κολέτσος

Λύσεις 2ης σειράς γραπτών ασκήσεων

(προτασιακός λογισμός)

Άσκηση 1.

Αποδείξτε το ακόλουθο λήμμα [Είμαστε στον πολωνικό τρόπο γραφής]

a) Ορίζεται συνάρτηση K με πεδίο ορισμού τις εκφράσεις της γλώσσας, τέτοια ώστε

1. Αν * σύμβολο της γλώσσας τότε $K(*)$ ακέραιος αριθμός
2. Αν $\sigma = \sigma_1\sigma_2...\sigma_n$ έκφραση της γλώσσας, τότε $K(\sigma) = K(\sigma_1) + K(\sigma_2)\ldots K(\sigma_n)$, όπου σ_i σύμβολο του αλφαβήτου.
3. Αν ϕ προτασιακός τύπος, τότε $K(\phi) = 1$.

b) Κάθε τερματικό τμήμα ενός προτασιακού τύπου είναι παράθεση ενός ή περισσότερων προτασιακών τύπων.

t$_2, \ldots, t_n$ είναι όροι, τότε $ft_1t_2 \cdots t_n$ c) Κανένα γνήσιο αρχικό τμήμα ενός προτασιακού τύπου δεν είναι προτασιακός τύπος (χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση K)

Με βάση τα παραπάνω αποδείξτε το θεώρημα μοναδικής αναγνωσιμότητας για τον πολωνικό τρόπο γραφής.

Λύση

Με επαγωγή στον προτασιακό τύπο. Στην περίπτωση ενός συμβόλου δηλ. αν ο προτασιακός τύπος είναι προτασιακή μεταβλητή το αποτέλεσμα συνάγεται τετριμμένα. Αν ο τύπος έχει π.χ. τη μορφή $\rightarrow \phi_1\phi_2$ τότε κάθε τερματικό τμήμα (διαφορετικό από τον εαυτό του) έχει τη μορφή $\phi_1^{'}\phi_2$ ή $\phi_2^{'}$. Και στις δύο περιπτώσεις χρησιμοποιώντας την Ε.Υ. έχουμε το αποτέλεσμα.

Πόρισμα 3. Κανένα γνήσιο αρχικό τμήμα ενός προτασιακού τύπου δεν είναι προτασιακός τύπος.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι ένας προτασιακός τύπος ϕ χωρίζεται σε δύο μέρη, ένα γνήσιο αρχικό τμήμα ϕ_1 και ένα τερματικό τμήμα ϕ_2. Τότε $1 = K(\phi) = K(\phi_1) + K(\phi_2)$ και από λήμμα 2 έχουμε ότι $K(\phi_2) \geq 1$. Άρα $K(\phi_1) < 1$ και ϕ_1 δεν μπορεί να είναι προτασιακός τύπος.

Μοναδική αναγνωσιμότητα: Είναι προφανές ότι αρκεί να εξετάσουμε περιπτώσεις της μορφής "Αν $\rightarrow \phi\psi \equiv \rightarrow \phi^{'}\psi^{'}$ τότε $\phi \equiv \phi^{'}$ και $\psi \equiv \psi^{'}$". Αλλά σ'αυτή την περίπτωση αν δεν είχαμε $\phi \equiv \phi^{'}$ τότε το ένα από τα δύο θα ήταν γνήσιο αρχικό τμήμα του άλλου και έτσι δεν θα μπορούσε να είναι προτασιακός τύπος.

ΠΟΛΩΝΙΚΗ ΓΡΑΦΗ ΣΤΟΝ ΚΑΤΗΓΟΡΗΜΑΤΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΟ έχουμε τους εξής ορισμούς:

Για τους όρους.

1. Οι μεταβλητές και τα σύμβολα σταθερών είναι όροι.

2. Αν f είναι σύμβολο συνάρτησης n-θέσεων και t_1, ε.

Ορίζοντας $K(x) = 1$ αν x είναι μεταβλητή, $K(c) = 1$ αν c είναι σύμβολο σταθεράς και $K(f) = 1-n$ αν f είναι σύμβολο συνάρτησης n-θέσεων, με τον ίδιο ακριβώς τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε τη μοναδική αναγνωσιμότητα για τους όρους.

Μπορούμε να επεκταθούμε με τον ίδιο τρόπο και στους τύπους. Στην Πολωνική γραφή οι ατομικοί τύποι έχουν τη μορφή $Rt_1 \cdots t_n$ όπου R είναι σύμβολο κατηγορήματος n-θέσεων και $t_1, \ldots, t_n$ είναι όροι. Επίσης με τη χρήση των ποσοδεικτών σχηματίζονται τύποι της μορφής $\forall x\phi$ και $\exists x\phi$. Η μοναδική αναγνωσιμότητα αντιμετωπίζεται επεκτείνοντας την K ως εξής: $K(R) = 1 - n$ αν R είναι σύμβολο κατηγορήματος n-θέσεων και $K(\forall) = K(\exists) = -1$.

Άσκηση 2.

Έστω M ο μειοψηφικός σύνδεσμος τριών θέσεων (δηλαδή η τιμή $\overline{V}(M\phi\psi\tau)$ είναι πάντα διαφορετική από την πλειοψηφία των τιμών $\overline{V}(\phi)$, $\overline{V}(\psi)$ και $\overline{V}(\tau)$). Δείξτε ότι:

1. Το σύνολο $\{M, \mathcal{F}\}$ είναι επαρκές ($\mathcal{F}$ είναι ο σύνδεσμος 0-θέσεων που πάντα σε κάθε V παίρνει την τιμή $\overline{V}(\mathcal{F}) = F$).

2. $\{M\}$ δεν είναι επαρκές [αποδείξτε ότι αν ϕ χρησιμοποιεί μόνο τον M και το A, τότε αν σε μια V πάρουμε το αντίθετο της τιμής $V(A)$ η καινούργια V' θα δώσει ως $\overline{V'}(\phi)$ το αντίθετο του $\overline{V}(\phi)$].

Λύση. 1. Αρκεί να ορίσουμε τα $\neg$ και $\wedge$ (τα οποία αποτελούν επαρκές σύνολο συνδέσμων) μέσω των M και $\mathcal{F}$.

$\neg A \vDash\Dashv M\mathcal{F}AA$ $A \vee B \vDash\Dashv M\mathcal{F}(\neg A)(\neg B)$ 2. Αρκεί να αποδείξουμε ότι δεν είναι δυνατόν να πραγματοποιηθεί ο σταθερός σύνδεσμος 1-θέσεως. Λέμε ότι στις αληθοτιμές T και F, η μία είναι αντίθετη της άλλης. Έστω τώρα ϕ ένας προτασικός τύπος που έχει δημιουργηθεί με τη χρήση μόνον της προτασιακής μεταβλητής A και του συνδέσμου M. Θα αποδείξουμε, με επαγωγή στον ϕ, ότι αν έχουμε μία απονομή V και πάρουμε την απονομή $V^{'}$ η οποία ορίζεται δίνοντας ως τιμή $V^{'}(A)$ την αντίθετη της τιμής $V(A)$, τότε η τιμή $\overline{V^{'}}(\phi)$ είναι η αντίθετη της τιμής $\overline{V}(A)$. Αν $\phi \equiv A$, προφανές. Αν $\phi \equiv M\phi_1\phi_2\phi_3$, τότε από Ε.Υ. θα ισχύει για τα ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3. Αλλά τότε η πλειοψηφία (μειοψηφία) των τιμών των ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 στην V γίνεται μειοψηφία (πλειοψηφία) στην $V^{'}$. Άρα η αντίστοιχη τιμή της ϕ στις δύο περιπτώσεις θα αντιστραφεί. Άρα δεν είναι δυνατόν να πραγματοποιείται ένας σταθερός σύνδεσμος.

Άσκηση 3.

Ισχύει για το σύνδεσμο $\leftrightarrow$ ο προσεταιριστικός και αντιμεταθετικός νόμος; Αποδείξτε ότι ένας προτασιακός τύπος πους περιέχει μόνον τον σύνδεσμο $\leftrightarrow$ είναι ταυτολογία αν και μόνο αν κάθε προτασιακή μεταβλητή εμφανίζεται έναν άρτιο αριθμό φορών.

Λύση

Έστω $A_1, A_2, \cdots, A_n$ τα προτασιακά σύμβολα που εμφανίζονται στην ϕ (Μπορεί να έχουμε πολλές ίδιες εμφανίσεις του ιδίου συμβόλου). Τότε επειδή για το $\leftrightarrow$ ισχύει ο προσεταιριστικός και αντιμεταθετικός νόμος έχουμε ότι $\phi \vDash\Dashv A_1 \leftrightarrow A_2 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow A_n$. Μαζεύοντας τα A που εμφανίζονται και ακόμα μία φορά στον ϕ θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \phi &\vDash\Dashv A_1 \leftrightarrow A_2 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow A_n \\ &\vDash\Dashv (A_1' \leftrightarrow A_1') \leftrightarrow (A_2' \leftrightarrow A_2') \leftrightarrow \cdots (A_k' \leftrightarrow A_k') \leftrightarrow A_\lambda \leftrightarrow A_{\lambda+1} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow A_n \end{aligned}$$

όπου $A_1', \ldots, A_k'$ είναι κάποια από τα $A_1, \ldots, A_n$ που εμφανίζονται διπλά και έστω $A_\lambda, A_{\lambda+1}, \ldots A_n$ τα υπόλοιπα A αφού ξεχωρίσουμε τα ζεύγη. Επειδή τα $A_i' \leftrightarrow A_i'$ είναι ταυτολογίες, $\phi \vDash\Dashv A_\lambda \leftrightarrow A_{\lambda+1} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow A_n$ που σημαίνει ότι ϕ είναι ταυτολογία $\Leftrightarrow$ δεν υπάρχουν τα $A_\lambda, \ldots, A_n$ $\Leftrightarrow$ κάθε προτασιακό σύμβολο εμφανίζεται άρτιο αριθμό φορών.

Άσκηση 4.

Άσκηση 1, σελ. 36, σημειώσεις

Άσκηση 5.

Άσκηση 2, σελ. 36, σημειώσεις