Αρμονική Ανάλυση (2023–24)
Ασκήσεις – Φυλλάδιο 3

(Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις. Ημερομηνία παράδοσης: 26 Μαΐου 2024)

1. Έστω $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Για κάθε $f \in C(\mathbb{T})$ ισχύει $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$.

(ii) Για κάθε $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ισχύει $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{imx_k} \longrightarrow 0$.

2. Έστω $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)(f(x) - s_n(f,x))\,dx = 0.$$

3. Έστω $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. Εξηγήστε γιατί $\|f - s_n(f)\|_2 \leqslant \|f - \sigma_n(f)\|_2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και με βάση αυτήν την παρατήρηση αποδείξτε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - s_n(f)\|_2 = 0$.

(β) Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$, η οποία είναι συνεχής στο x_0. Αποδείξτε ότι αν υπάρχει το $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(f, x_0)$ τότε είναι ίσο με $f(x_0)$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το θεώρημα Féjer.

4. (α) Έστω $g, f, f_n \in \mathcal{R}([a,b)$ με $\|f_n - f\|_2 \to 0$. Ορίζουμε

$$h(x) = \int_a^x f(t)g(t)\,dt \quad \text{και} \quad h_n(x) = \int_a^x f_n(t)g(t)\,dt, \qquad x \in [a,b].$$

Αποδείξτε ότι $h_n \to h$ ομοιόμορφα.

(β) Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι, για κάθε $x \in [0, 2\pi]$,

$$\int_0^x f(t)\,dt = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x (a_k \cos kt + b_k \sin kt)\,dt,$$

δηλαδή μπορούμε να ολοκληρώσουμε τη σειρά Fourier της f όρο προς όρο, ακόμα κι αν αυτή αποκλίνει.

5. Χρησιμοποιώντας την $f(x) = x^2$, $x \in [-\pi, \pi]$ υπολογίστε το $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$.

6. (α) Αποδείξτε ότι αν $a \neq 0$ τότε

$$e^{ax} = \frac{e^{2\pi a} - 1}{\pi} \left(\frac{1}{2a} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a\cos kx - k \sin kx}{a^2 + k^2} \right), \qquad 0 < x < 2\pi.$$

(β) Για $0 < x < 2\pi$ και $a \neq 0$ υπολογίστε τα αθροίσματα των σειρών

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a \cos kx}{a^2 + k^2} \quad \text{και} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sin kx}{a^2 + k^2}.$$

(γ) Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα Parseval υπολογίστε τα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(a^2+k^2)^2} \quad \text{και} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(a^2+k^2)^2}.$$

7. (α) Έστω $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \|fg - s_n(f)s_n(g)\|_1 = 0.$$

(β) Αποδείξτε ότι $\widehat{fg}(k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s_n(f,x)s_n(g,x)e^{-ikx}dx$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

(γ) Αποδείξτε ότι αν $\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k) = 0$ για κάθε $k < 0$ τότε $\widehat{fg}(k) = 0$ για κάθε $k < 0$.

8. Θεωρούμε την ακολουθία $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ με

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{αν } k \geqslant 1 \\ 0 & \text{αν } k \leqslant 0 \end{cases}$$

Δείξτε ότι $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ αλλά δεν υπάρχει $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα $\widehat{f}(k) = a_k$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Υπόδειξη: Υποθέτοντας, προς άτοπο, ότι υπάρχει τέτοια f, παρατηρήστε ότι η $\{k\widehat{f}(k)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ είναι φραγμένη και ότι $s_n(f,0) \to +\infty$.

9. (α) Έστω $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ ακολουθία μιγαδικών αριθμών τέτοια ώστε $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\widehat{f}(k) = a_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

(β) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{k}}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

(γ) Χρησιμοποιώντας το (α) αποδείξτε ότι υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{k}}$ για άπειρους το πλήθος $k \in \mathbb{N}$.

10. (α) Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι

$$s_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left[f(x+t) + f(x-t)\right] \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt.$$

(β) Έστω $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι $\|s_n(f)\|_{\infty} = o(\ln n)$.

Υπόδειξη: Θεωρήστε τη διαφορά $s_n(f,x) - f(x)$. Χρησιμοποιώντας το (α) μπορείτε να την γράψετε ως

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left[f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)\right] \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt.$$

Φράξτε το

$$I_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)\right| \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt$$

κατάλληλα (ανεξάρτητα από το x) και δείξτε ότι $I_n/\ln n \longrightarrow 0$ καθώς το $n \to \infty$.