**Αρμονική Ανάλυση (2023–24)**
**Ασκήσεις – Φυλλάδιο 2**

(Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις. Ημερομηνία παράδοσης: 28 Απριλίου 2024)

**1.** Έστω $f \in C^1(\mathbb{T})$ με $|f'(x) - f'(y)| \leqslant M|x-y|^\alpha$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ (για κάποιο $M > 0$ και $0 < \alpha \leqslant 1$). Αποδείξτε ότι $s_n(f) \longrightarrow f$ ομοιόμορφα.

**2.** Έστω $f \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx = 0$ για κάθε $k \geqslant 0$. Αποδείξτε ότι η $f$ είναι περιττή συνάρτηση.

**3.** Έστω $f \in C(\mathbb{T})$ και $g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ ώστε $f * g = f$. Αποδείξτε ότι η $f$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο.

**4.** Έστω $(f_n)$ ακολουθία στον $\mathcal{R}(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα: για κάθε $g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$,

$$\lim_{n\to\infty} \|g - g * f_n\|_1 = 0.$$

Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \widehat{f_n}(k) = 1$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

**5.** Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η $2\pi$-περιοδική συνάρτηση με

$$f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{για } \ |x| \leqslant \pi.$$

Υπολογίστε τη σειρά Fourier της $f$ και χρησιμοποιώντας την υπολογίστε το

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}.$$

**6.** Θεωρούμε την $2\pi$-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x$ αν $-\pi \leqslant x < \pi$. Αποδείξτε ότι

$$f(x) = 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin kx}{k}$$

για κάθε $x \in (-\pi, \pi)$.

**7.** Θεωρούμε την $2\pi$-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = -1$ αν $-\pi < x < 0$, $f(x) = 1$ αν $0 < x < \pi$, και $f(-\pi) = f(0) = f(\pi) = 0$. Αποδείξτε ότι

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επιλέγοντας κατάλληλα το $x$ αποδείξτε ότι

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k+1}.$$

**8.** Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Αν $(k_n)$ είναι μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών και $(t_n)$ είναι τυχούσα ακολουθία πραγματικών αριθμών, υπολογίστε το

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\cos^2(k_n x + t_n)\, dx.$$

**9.** Έστω $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ και έστω $\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $\alpha/\pi \notin \mathbb{Q}$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(x+k\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

[*Υπόδειξη:* Εξετάστε πρώτα την περίπτωση που η $f$ είναι μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο.]

**10.** (α) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ αύξουσα και παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε η $f'$ να είναι ολοκληρώσιμη και $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a,b]$ τέτοιο ώστε

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^{\xi} g(x)\,dx + f(b)\int_{\xi}^{b} g(x)\,dx.$$

[*Υπόδειξη:* Θεωρήστε την $G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$ και χρησιμοποιήστε ολοκλήρωση κατά παράγοντες.]

(β) Έστω $h \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε ότι $h = f_1 - f_2$ στο $[-\pi,\pi]$, όπου $f_1, f_2 : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ αύξουσες και παραγωγίσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε οι $f_1', f_2'$ να είναι ολοκληρώσιμες. Αποδείξτε ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $a_k(h) \leqslant \frac{M}{k}$ και $b_k(h) \leqslant \frac{M}{k}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.