Αρμονική Ανάλυση (2023–24)
Υποδείξεις για τις Ασκήσεις του Φυλλαδίου 1

1. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $L(f,\mathcal{P})=0$ για κάθε διαμέριση $\mathcal{P}$ του $[a,b]$. Είναι απαραίτητο η f να είναι η μηδενική συνάρτηση;

Υπόδειξη: Θεωρούμε την τετριμμένη διαμέριση $\mathcal{P}_0=\{a,b\}$ του $[a,b]$. Έστω $m=\min\{f(x):a\leqslant x\leqslant b\}$. Τότε, από την υπόθεση παίρνουμε

$$m(b-a)=L(f,\mathcal{P}_0)=0,$$

άρα $m=0$. Αυτό σημαίνει ότι $f(x)\geqslant 0$ για κάθε $x\in[a,b]$. Επίσης, η f είναι ολοκληρώσιμη ως συνεχής, και αφού $L(f,\mathcal{P})=0$ για κάθε διαμέριση $\mathcal{P}$ του $[a,b]$, έχουμε

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sup\{L(f,\mathcal{P}):\mathcal{P}\text{ διαμέριση του }[a,b]\}=0.$$

Από γνωστή άσκηση (είναι η Άσκηση 2.7 των Σημειώσεων) έπεται ότι η f είναι η μηδενική συνάρτηση.

2.Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ η συνάρτηση με

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{αν } x \text{ ρητός}\\ 0 & \text{αν } x \text{ άρρητος}\end{cases}$$

Υπολογίστε το $L(f,\mathcal{P})$ για όλες τις διαμερίσεις $\mathcal{P}$ του $[0,1]$ και επίσης το

$$\inf\{U(f,\mathcal{P}):\mathcal{P}\text{ διαμέριση του }[0,1]\}.$$

Υπόδειξη: Έστω $\mathcal{P}=\{0=x_0<x_1<\cdots<x_k<x_{k+1}<\cdots<x_n=1\}$ τυχούσα διαμέριση του $[0,1]$. Για κάθε $k=0,1,\dots,n-1$ υπάρχει άρρητος α_k στο (x_k,x_{k+1}). Αφού $f(\alpha_k)=0$ και $0\leqslant f(x)\leqslant 1$ στο $[x_k,x_{k+1}]$, συμπεραίνουμε ότι $m_k=0$. Συνεπώς,

$$L(f,\mathcal{P})=0.$$

Επίσης, υπάρχει ρητός $q_k>(x_k+x_{k+1})/2$ στο (x_k,x_{k+1}), άρα $M_k\geqslant f(q_k)>(x_k+x_{k+1})/2$. Έπεται ότι

$$U(f,\mathcal{P})>\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x_k+x_{k+1}}{2}(x_{k+1}-x_k)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}^2-x_k^2)=\frac{x_n^2-x_0^2}{2}=\frac{1}{2}.$$

Αφού $U(f,\mathcal{P})>\frac{1}{2}$ για κάθε διαμέριση $\mathcal{P}$ του $[0,1]$, έπεται ότι

$$\inf\{U(f,\mathcal{P}):\mathcal{P}\text{ διαμέριση του }[0,1]\}\geqslant\frac{1}{2}.$$

Παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε τη διαμέριση $\mathcal{P}_n=\left\{0<\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\cdots<\frac{n-1}{n}<1\right\}$, τότε $M_k=\frac{k+1}{n}$ για κάθε $k=0,1,\dots,n$, άρα

$$U(f,\mathcal{P}_n)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k+1}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^2}(1+2+\cdots+n)=\frac{n(n+1)}{2n^2}\to\frac{1}{2}.$$

Αυτό δείχνει ότι

$$\inf\{U(f,\mathcal{P}):\mathcal{P}\text{ διαμέριση του }[0,1]\}\leqslant\lim_{n\to\infty}U(f,\mathcal{P}_n)=\frac{1}{2},$$

οπότε το $\inf U(f,\mathcal{P})$ είναι τελικά ίσο με $\frac{1}{2}$.

3. Έστω $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχής γνησίως αύξουσα συνάρτηση με $f(0)=0$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Αποδείξτε ότι: για κάθε $a,b>0$ ισχύει ότι

$$ab \leqslant \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^b f^{-1}(y)\,dy$$

με ισότητα αν και μόνο αν $b=f(a)$.

Υπόδειξη: Δείχνουμε αρχικά ότι ισχύει ισότητα αν $b=f(a)$. Παρατηρήστε ότι η f^{-1} είναι επίσης γνησίως αύξουσα, άρα ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό διάστημα $[0,f(a)]$ όπου $a>0$.

Θεωρούμε τυχούσα διαμέριση $\mathcal{P}=\{0=x_0<x_1<\cdots<x_n=a\}$ του $[0,a]$. Αν θέσουμε $y_i=f(x_i)$ (παρατηρήστε ότι $y_0=f(0)=0$ και $y_n=f(a)$) τότε το $\mathcal{Q}=\{0=y_0<y_1<\cdots<y_n=f(a)\}$ είναι διαμέριση του $[0,f(a)]$. Επίσης, αφού οι f και f^{-1} είναι αύξουσες, έχουμε ότι $m_k(f)=f(x_k)=y_k$, $M_k(f)=f(x_{k+1})=y_{k+1}$ και $m_k(f^{-1})=f^{-1}(y_k)=x_k$, $M_k(f^{-1})=f^{-1}(y_{k+1})=x_{k+1}$ για κάθε $k=0,1,\ldots,n-1$. Έπεται ότι

$$L(f,\mathcal{P})=\sum_{k=0}^{n-1} y_k(x_{k+1}-x_k),\quad U(f,\mathcal{P})=\sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1}(x_{k+1}-x_k)$$

και

$$L(f^{-1},\mathcal{Q})=\sum_{k=0}^{n-1} x_k(y_{k+1}-y_k),\quad U(f^{-1},\mathcal{Q})=\sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1}(y_{k+1}-y_k).$$

Τότε,

$$\begin{aligned} L(f,\mathcal{P})+U(f^{-1},\mathcal{Q}) &= \sum_{k=0}^{n-1}(y_kx_{k+1}-y_kx_k+x_{k+1}y_{k+1}-x_{k+1}y_k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}y_{k+1}-x_ky_k)=x_ny_n-x_0y_0=af(a) \end{aligned}$$

και όμοια,

$$U(f,\mathcal{P})+L(f^{-1},\mathcal{Q})=af(a).$$

Από την πρώτη ισότητα βλέπουμε ότι

$$L(f,\mathcal{P})+\int_0^{f(a)} f^{-1}(y)\,dy \leqslant af(a)$$

για κάθε $\mathcal{P}$, και παίρνοντας supremum ως προς $\mathcal{P}$ αποδεικνύουμε την

$$\int_0^a f(x)\,dx+\int_0^b f^{-1}(y)\,dy \leqslant af(a).$$

Από την δεύτερη ισότητα βλέπουμε ότι

$$\int_0^a f(x)\,dx+U(f^{-1},\mathcal{Q}) \geqslant af(a)$$

για κάθε $\mathcal{Q}$ (παρατηρήστε ότι όπως κάθε $\mathcal{P}$ ορίζει μια $\mathcal{Q}$ έτσι και κάθε $\mathcal{Q}$ ορίζει μια $\mathcal{P}$) και παίρνοντας infimum ως προς $\mathcal{Q}$ αποδεικνύουμε την

$$\int_0^a f(x)\,dx+\int_0^b f^{-1}(y)\,dy \geqslant af(a).$$

Επομένως, ισχύει η ισότητα.

Έστω τώρα ότι $b>f(a)$. Έχουμε

$$\int_0^a f(x)\,dx+\int_0^b f^{-1}(y)\,dy=\int_0^a f(x)\,dx+\int_0^{f(a)} f^{-1}(y)\,dy+\int_{f(a)}^b f^{-1}(y)\,dy=af(a)+\int_{f(a)}^b f^{-1}(y)\,dy,$$

άρα ζητάμε

$$ab \leqslant af(a) + \int_{f(a)}^{b} f^{-1}(y)\,dy \iff a(b - f(a)) \leqslant \int_{f(a)}^{b} f^{-1}(y)\,dy.$$

Όμως, η f^{-1} είναι αύξουσα, άρα $f^{-1}(y) \geqslant f^{-1}(f(a)) = a$ για κάθε $y \in [f(a), b]$, και έπεται ότι

$$\int_{f(a)}^{b} f^{-1}(y)\,dy \geqslant \int_{f(a)}^{b} a\,dy = a(b - f(a)).$$

Τέλος, έστω ότι $b < f(a)$, οπότε $f^{-1}(b) < a$. Έχουμε

$$\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^b f^{-1}(y)\,dy = \int_{f^{-1}(b)}^{a} f(x)\,dx + \int_0^{f^{-1}(b)} f(x)\,dx + \int_0^b f^{-1}(y)\,dy = \int_{f^{-1}(b)}^{a} f(x)\,dx + f^{-1}(b)b,$$

άρα ζητάμε

$$ab \leqslant \int_{f^{-1}(b)}^{a} f(x)\,dx + f^{-1}(b)b \iff b(a - f^{-1}(b)) \leqslant \int_{f^{-1}(b)}^{a} f(x)\,dx.$$

Όμως, η f είναι αύξουσα, άρα $f(x) \geqslant f(f^{-1}(b)) = b$ για κάθε $x \in [f^{-1}(b), a]$, και έπεται ότι

$$\int_{f^{-1}(b)}^{a} f(x)\,dx \geqslant \int_{f^{-1}(b)}^{a} b\,dx = b(a - f^{-1}(b)).$$

4. Έστω $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ η οποία είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, x]$ για κάθε $x > 0$ και επίσης ικανοποιεί την $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \alpha \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = \alpha.$$

Υπόδειξη: Έστω $\epsilon > 0$. Αφού $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \alpha$, υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $|f(t) - \alpha| \leqslant \epsilon$ για κάθε $t \geqslant M$. Έστω $x > M$. Τότε,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x f(t)\,dt - \alpha\,x\right| &= \left|\int_0^x (f(t) - \alpha)\,dt\right| \leqslant \int_0^x |f(t) - \alpha|\,dt \\ &= \int_0^M |f(t) - \alpha|\,dt + \int_M^x |f(t) - \alpha|\,dt \leqslant \int_0^M |f(t) - \alpha|\,dt + (x - M)\epsilon.\end{aligned}$$

Θέτουμε

$$A := \int_0^M |f(t) - \alpha|\,dt.$$

Το A εξαρτάται από το ϵ, αφού ο M εξαρτάται από το ϵ. Τότε, για κάθε $x > M$ έχουμε

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt - \alpha\right| \leqslant \frac{A}{x} + \frac{x - M}{x}\epsilon \leqslant \frac{A}{x} + \epsilon.$$

Θεωρούμε τώρα $M_1 > M$ αρκετά μεγάλο ώστε $\frac{A}{M_1} \leqslant \epsilon$. Τότε, για κάθε $x \geqslant M_1$ έχουμε ότι

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt - \alpha\right| \leqslant \frac{A}{x} + \epsilon \leqslant \frac{A}{M_1} + \epsilon \leqslant 2\epsilon.$$

Το $\epsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt \longrightarrow \alpha$$

καθώς το $x \to +\infty$.

5. Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) όπου $f_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (1-nx)^2}, \qquad x \in [0,+\infty).$$

(α) Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο στη συνάρτηση $f \equiv 0$.

(β) Αποδείξτε ότι η σύγκλιση της (f_n) στην f δεν είναι ομοιόμορφη στο διάστημα $[0,+\infty)$, αλλά είναι ομοιόμορφη σε κάθε διάστημα της μορφής $[\alpha,+\infty)$, όπου $\alpha > 0$.

Υπόδειξη: (α) Αν $x = 0$ τότε $f_n(x) = f_n(0) = 0 \to 0$. Αν $x > 0$ τότε για $n > 1/x$ έχουμε $nx > 1$, άρα

$$f_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (nx-1)^2} = \frac{1}{1 + (n - 1/x)^2} \to 0$$

διότι $n - \frac{1}{x} \to +\infty$ όταν $n \to \infty$. 'ρα, $f_n \to f \equiv 0$ στο $[0,+\infty)$.
(β) Παραγωγίζοντας την f_n παίρνουμε

$$f_n'(x) = \frac{2x(1-nx)}{(x^2 + (1-nx)^2)^2},$$

άρα η f_n είναι αύξουσα στο $\left[0, \frac{1}{n}\right]$, φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{n}, \infty\right)$, και

$$\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \not\to 0,$$

άρα η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη στο $[0,+\infty)$. Έστω $\alpha > 0$. Αν $\frac{1}{n} < \alpha$, δηλαδή για n αρκετά μεγάλο, έχουμε ότι η f_n είναι φθίνουσα στο $[\alpha,+\infty)$, άρα για κάθε $x \geqslant \alpha$ ισχύει ότι

$$|f_n(x)| \leqslant |f_n(a)| \to 0$$

από το (α). Έπεται ότι $f_n \to f \equiv 0$ ομοιόμορφα στο $[\alpha,+\infty)$.

6. Εξετάστε αν οι σειρές συναρτήσεων

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{k(1+kx^3)} \qquad \text{και} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^3 e^{-k^2 x}$$

συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0,+\infty)$.
Υπόδειξη: (α) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f_k(x) = \frac{x^2}{k(1+kx^3)}$. Παραγωγίζοντας την f_k παίρνουμε

$$f_k'(x) = \frac{1}{k}\frac{2x(1+kx^3) - x^2 \cdot 3kx^2}{(1+kx^3)^2} = \frac{1}{k}\frac{x(2-kx^3)}{(1+kx^3)^2}.$$

Άρα, η f_k παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο $\sqrt[3]{2/k}$ και είναι ίση με

$$\|f_k\|_\infty = f_k(\sqrt[3]{2/k}) = \frac{2^{2/3}}{3k \cdot k^{2/3}}.$$

Η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_\infty = \frac{2^{2/3}}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{5/3}}$$

συγκλίνει, οπότε από το κριτήριο Weierstrass η σειρά συναρτήσεων $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{k(1+kx^3)}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $(0,\infty)$.

(β) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $g_k(x) = k^2x^3e^{-k^2x}$. Παραγωγίζοντας την g_k παίρνουμε

$$g_k'(x) = k^2(3x^2e^{-k^2x} - k^2x^3e^{-k^2x}) = k^2x^2e^{-k^2x}(3-k^2x).$$

Άρα, η g_k παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο $3/k^2$ και είναι ίση με

$$\|g_k\|_\infty = g_k(3/k^2) = k^2 \cdot \frac{27}{k^6}e^{-3} = \frac{27}{e^3} \cdot \frac{1}{k^4}.$$

Τώρα,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_\infty \leqslant \frac{27}{e^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} < +\infty,$$

οπότε από το κριτήριο Weierstrass η σειρά συναρτήσεων $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2x^3e^{-k^2x}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $(0,\infty)$.

7. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k \sin(kx)}{k!}$ συγκλίνει απολύτως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k \sin(kx)}{k!}$$

είναι συνεχής.

Υπόδειξη: Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{x^k \sin(kx)}{k!} \right| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} = e^{|x|} < +\infty,$$

άρα η σειρά $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k \sin(kx)}{k!}$ συγκλίνει απολύτως. Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε την

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k \sin(kx)}{k!}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Αν θέσουμε $f_k(x) = \frac{x^k \sin(kx)}{k!}$ τότε για κάθε $\alpha > 0$ και κάθε $x \in [-\alpha, \alpha]$ έχουμε

$$|f_k(x)| \leqslant \frac{|x|^k}{k!} \leqslant \frac{\alpha^k}{k!},$$

και αφού

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} = e^\alpha < +\infty$$

το κριτήριο Weierstrass μας δίνει ότι η σειρά $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k \sin(kx)}{k!}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-\alpha, \alpha]$. Αφού οι f_k είναι συνεχείς, έπεται ότι η F είναι συνεχής στο $[-\alpha, \alpha]$. Ειδικότερα, η F είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $[-\alpha, \alpha]$.

Έστω τώρα $x \in \mathbb{R}$. Υπάρχει $\alpha > 0$ ώστε $x \in [-\alpha, \alpha]$. Εφαρμόζοντας το παραπάνω για το συγκεκριμένο α, συμπεραίνουμε ότι η F είναι συνεχής στο x. Το $x \in \mathbb{R}$ ήταν τυχόν, άρα η F είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

8. Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) όπου $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = e^{-x^2/n^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(α) Εξετάστε την (f_n) ως προς την κατά σημείο και την ομοιόμορφη σύγκλιση.

(β) Εξετάστε τη σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-e^{-x^2/k^2})$$

ως προς την κατά σημείο και την ομοιόμορφη σύγκλιση.

Υπόδειξη: (α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε ότι $\frac{x^2}{n^2}\to 0$ όταν $n\to\infty$, άρα

$$f_n(x)=e^{-x^2/n^2}\to e^0=1.$$

Ορίζουμε $f\equiv 0$. Τότε, $f_n\to f$ κατά σημείο στο $\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι

$$\|f-f_n\|_\infty=\sup\Big\{|1-e^{-x^2/n^2}|:x\in\mathbb{R}\Big\}\geqslant \lim_{x\to+\infty}|1-e^{-x^2/n^2}|=1,$$

διότι $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x^2/n^2}=0$. Αφού $\|f-f_n\|_\infty\not\to 0$, η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

(β) Θέτουμε $f_k(x)=1-e^{-x^2/k^2}$. Θεωρούμε την $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(y)=-e^{-y}$. Τότε, $|g'(y)|=e^{-y}\leqslant 1$ για κάθε $y\geqslant 0$, άρα η g είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά 1 (εξηγήστε το, χρησιμοποιώντας το θεώρημα μέσης τιμής). Τότε, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και κάθε $k\geqslant 1$ έχουμε

$$|f_k(x)|=|1-e^{-x^2/k^2}|=\left|g\left(\frac{x^2}{k^2}\right)-g(0)\right|\leqslant\frac{x^2}{k^2}.$$

Έπεται ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty}|1-e^{-x^2/k^2}|\leqslant x^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}<+\infty,$$

άρα η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(1-e^{-x^2/k^2})$ συγκλίνει για κάθε x στο $\mathbb{R}$. Αν η σύγκλιση ήταν ομοιόμορφη, για κάθε $\epsilon>0$ θα υπήρχε $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε για κάθε $m\geqslant n\geqslant n_0$ να ισχύει ότι $\|f_n+\cdots+f_m\|_\infty<\epsilon$, και ειδικότερα $\|f_n\|_\infty<\epsilon$. Δηλαδή, θα είχαμε $\|f_n\|_\infty\to 0$. Όμως,

$$\|f_n\|_\infty\geqslant f_n(n)=1-e^{-n^2/n^2}=1-\frac{1}{e},$$

άρα $\|f_n\|_\infty\not\to 0$. Συνεπώς, η $\sum_{k=1}^{\infty}(1-e^{-x^2/k^2})$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ (εξετάστε όμως αν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-\alpha,\alpha]$, για κάθε $\alpha>0$).

9. Έστω $f_n,f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f_n\longrightarrow f$ ομοιόμορφα. Υποθέτουμε ότι για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}f_n(x)=0$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$

Υπόδειξη: Έστω $\epsilon>0$. Αφού $f_n\longrightarrow f$ ομοιόμορφα, υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

$$|f(x)-f_{n_0}(x)|\leqslant\frac{\epsilon}{2}.$$

Για την f_{n_0} γνωρίζουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}f_{n_0}(x)=0$, άρα υπάρχει $M>0$ τέτοιος ώστε, για κάθε $x\geqslant M$,

$$|f_{n_0}(x)|\leqslant\frac{\epsilon}{2}.$$

Τότε, για κάθε $x \geqslant M$ έχουμε ότι

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x)| \leqslant \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Με βάση τον ορισμό, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

10*. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = n\sin(\sqrt{4\pi^2 n^2 + x^2}).$$

Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο σε κάποια $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ποια είναι η f; Αποδείξτε επίσης ότι $f_n \longrightarrow f$ ομοιόμορφα στο $[0, \alpha]$ για κάθε $\alpha > 0$. Είναι η σύγκλιση ομοιόμορφη στο $\mathbb{R}$;

Υπόδειξη: Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\sin(\sqrt{4\pi^2 n^2 + x^2}) &= \sin\left(2\pi\sqrt{1 + \frac{x^2}{4\pi^2 n^2}} + 2n\pi - 2n\pi\right) = \sin\left(2\pi\sqrt{1 + \frac{x^2}{4\pi^2 n^2}} - 2n\pi\right)\\ &= \sin\left(2n\pi\left(\sqrt{1 + \frac{x^2}{4\pi^2 n^2}} - 1\right)\right) = \sin\left(\frac{x^2}{\sqrt{4n^2\pi^2 + x^2} + 2n\pi}\right).\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το γνωστό όριο $\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$ συμπεραίνουμε ότι

$$f_n(x) = n\sin\left(\frac{x^2}{\sqrt{4n^2\pi^2 + x^2} + 2n\pi}\right) \to \frac{x^2}{4\pi}.$$

Επιπλέον, αν $\alpha > 0$ τότε για κάθε $x \in [0, \alpha]$, χρησιμοποιώντας την ανισότητα $\sin x \geqslant x - \frac{x^3}{3!}$ παίρνουμε

$$\left|f_n(x) - \frac{x^2}{4\pi}\right| \leqslant \frac{\alpha^2}{4\pi}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{4\pi^2 n^2}} + 1}\right) + \frac{n}{3!}\frac{\alpha^6}{8n^3\pi^3},$$

το οποίο δείχνει ότι $f_n \to f(x) = \frac{x^2}{4\pi}$ ομοιόμορφα στο $[0, \alpha]$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, από την ανισότητα $|\sin x| \leqslant |x|$ παίρνουμε ότι

$$\left|f_n(x) - \frac{x^2}{4\pi}\right| \geqslant \frac{x^2}{4\pi}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{4\pi^2 n^2}} + 1}\right),$$

το οποίο δείχνει ότι η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη στο $\mathbb{R}$ (θεωρήστε το όριο καθώς το $x \to +\infty$).