ΘΕΩΡΗΜΑ CAUCHY-GOURSAT

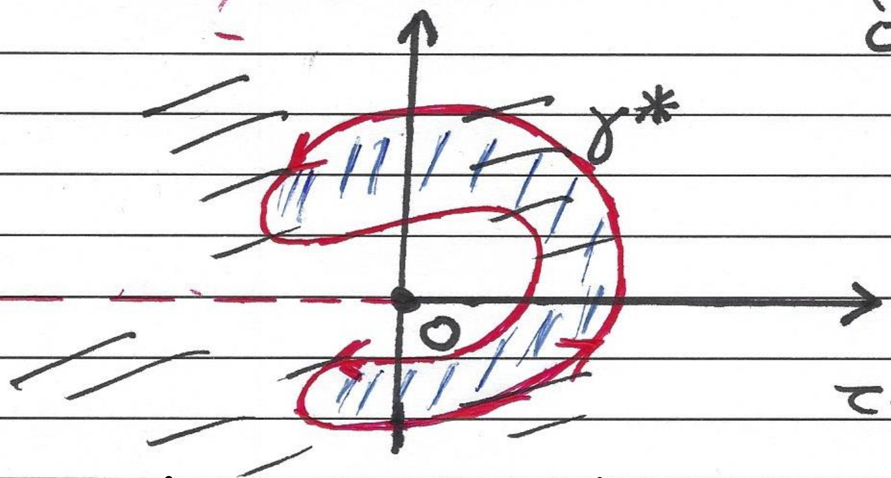
Ορισμός 1: Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ πεδίο (δηλ. ανοικτό συνεκτικό). Το U λέγεται απλά συνεκτικό ανν το εσωτερικό κάθε κλειστής καμπύλης γ με $\gamma^* \subset U$ περιέχεται στο U.

Γεωμετρικά, απλά συνεκτικό πεδίο είναι ένα πεδίο χωρίς "οπές."

Παραδείγματα:

(i) κάθε ανοικτός δίσκος είναι απλά συνεκτικό.

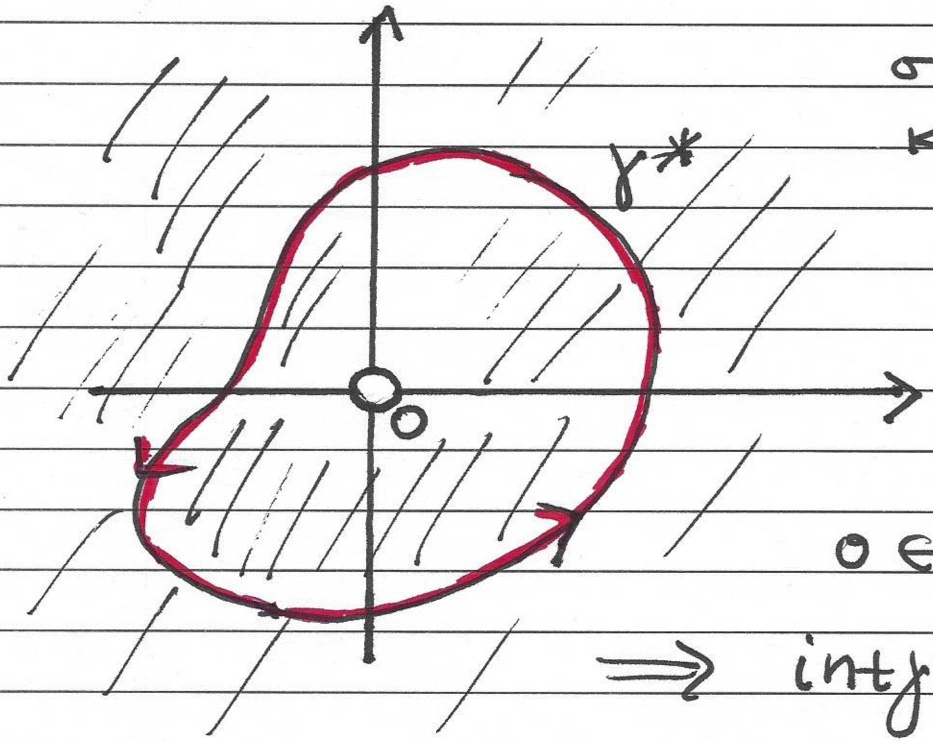
(ii) Το $U = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ είναι απλά συνεκτικό.



Όπως φαίνεται στο σχήμα, εάν γ κλειστή καμπύλη με $\gamma^* \subset U$, τότε $\operatorname{int}\gamma^* \subset U$.

(iii) Εάν γ απλή κλειστή καμπύλη του $\mathbb{C}$ (ή του $\mathbb{R}^2$), το $\operatorname{int}\gamma^*$ είναι απλά συνεκτικό (Θ. Jordan-Schoenflies)! [ΔΕΝ ισχύει σε ανώτερες διαστάσεις!]

<u>(iii)</u> Το πεδίο $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ <u>δεν</u> είναι απλά συνεκτικό. Πράγματι, στο



σχήμα, η καμπύλη γ είναι κλειστή με $\gamma^* \subset U$ αλλά $0 \in \operatorname{int}\gamma^*$

$$\Rightarrow \operatorname{int}\gamma^* \not\subset U.$$

<u>Θεώρημα 1 (Θ. Cauchy - Goursat!!)</u>

Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ απλά συνεκτικό πεδίο και $f \in \mathcal{H}(U)$ (δηλ. $f: U \to \mathbb{C}$ ολόμορφη).

Εάν γ <u>κλειστή</u>, τμηματικά λεία καμπύλη με $\gamma^* \subset U$, τότε

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Η απόδειξη του Θ.1 δόθηκε από τον <u>E. Goursat (1883)</u> (εδώ παραλείπεται).

Το 1825, ο L-A. Cauchy έδωσε μια απλή απόδειξη του Θ.1 <u>αλλά</u> με την επιπλέον υπόθεση ότι <u>f' συνεχής</u>!

Εδώ θα δώσουμε την απόδειξη του Θ.1 υποθέτοντας ότι:

- f' συνεχής
- γ λεία

Η απόδειξη βασίζεται στο <u>Θ. Green</u>:

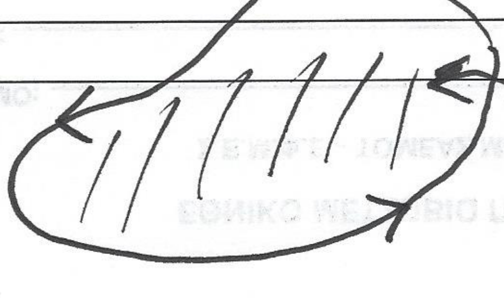
<u>Θεώρημα 2 (Green)</u>:

Έστω G <u>απλά συνεκτικό πεδίο</u> $\subseteq \mathbb{R}^2$ με σύνορο μια θετικά προσανατολισμένη τμ. λεία καμπύλη γ κ' $P=P(x,y)$, $Q=Q(x,y): G\to\mathbb{R}$ συναρτήσεις με <u>συνεχείς</u> <u>μερικές παραγώγους</u> πρώτης τάξης στο G.

Τότε,

$$\oint_\gamma (Pdx+Qdy)=\iint_G (Q_x-P_y)\,dxdy.$$

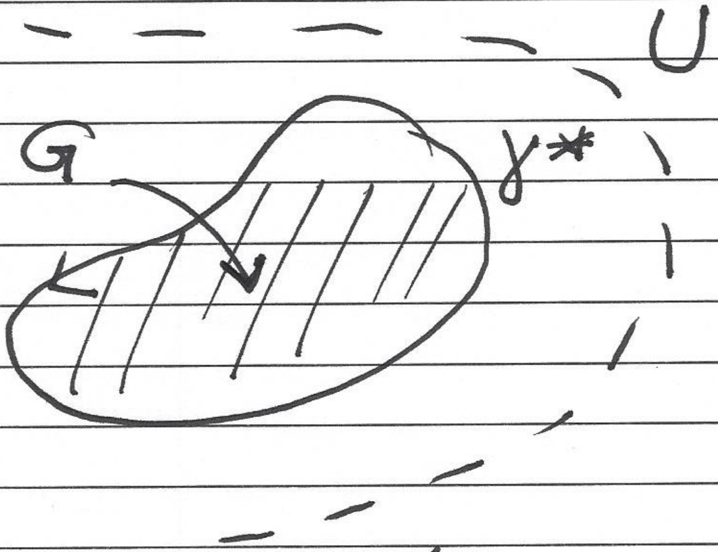
γ^*



G

Απόδειξη Θ.1: Υποθέτουμε ότι

- f' συνεχής στο U
- γ λεία



Έστω $f = u + iv$

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$

με $\gamma(t) = x(t) + i y(t)$, $t \in [a,b]$.

Τότε, $f' = u_x + i v_x$ στο U

κ' $\boxed{(C\text{-}R) \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \text{ στο } U.}$

Επειδή f' συνεχής, έπεται ότι

$\boxed{u_x,\ u_y,\ v_x,\ v_y \text{ συνεχείς στο } U.}$

Επιπλέον, $x(\cdot), y(\cdot) \in C^1[a,b]$ αφού γ λεία. Θα χρησιμοποιήσουμε την "ταύτιση"

$$\gamma(t) \equiv (x(t), y(t)), \quad t \in [a,b].$$

Έχουμε $\longrightarrow$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt =$$

$$= \int_a^b \left[u(\gamma(t)) + i v(\gamma(t))\right] \cdot \left[x'(t) + i y'(t)\right] dt$$

$$= \int_a^b \left[u(\gamma(t))x'(t) - v(\gamma(t))y'(t)\right] dt \; +$$

$$+ \; i \int_a^b \left[u(\gamma(t))y'(t) + v(\gamma(t))x'(t)\right] dt$$

$$= \int_a^b \left(u(\gamma(t)), -v(\gamma(t))\right) \bullet \gamma'(t)\,dt \; +$$

$$+ \; i \int_a^b \left(v(\gamma(t)), u(\gamma(t))\right) \bullet \gamma'(t)\,dt$$

(με $(\bullet)$ συμβολίζουμε το εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^2$ κι' εφαρμόσαμε την ταύτιση

$$\gamma(t) \equiv (x(t), y(t)),$$

$$\gamma'(t) \equiv (x'(t), y'(t))).$$

Με βάση τα παραπάνω και τον ορισμό του επικαμπύλιου ολοκληρώματος, παίρνουμε

$$\int_\gamma f(z)dz = \oint_\gamma (u dx - v dy) + \\ + i \oint_\gamma (v dx + u dy). \qquad (1)$$

Επειδή οι u, v έχουν <u>συνεχείς</u> μερικές παραγώγους στο <u>απλά</u> <u>συνεκτικό</u> πεδίο $G = \text{int}\gamma^* \subseteq U$ (σημ. ότι U απλά συνεκτικό κ' $\gamma^* \subset U$), μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θ. Green σε κάθε ένα από τα επικαμπύλια ολοκληρώματα του β' μέλους της (1). Έτσι έχουμε

$$\int_\gamma f(z)dz = \iint_G (-v_x - u_y)dxdy + \\ + i \iint_G (u_x - v_y)\, dxdy \underline{\underline{(C-R)}}$$

$$= 0 + i \cdot 0 = 0.$$

$\boxtimes$

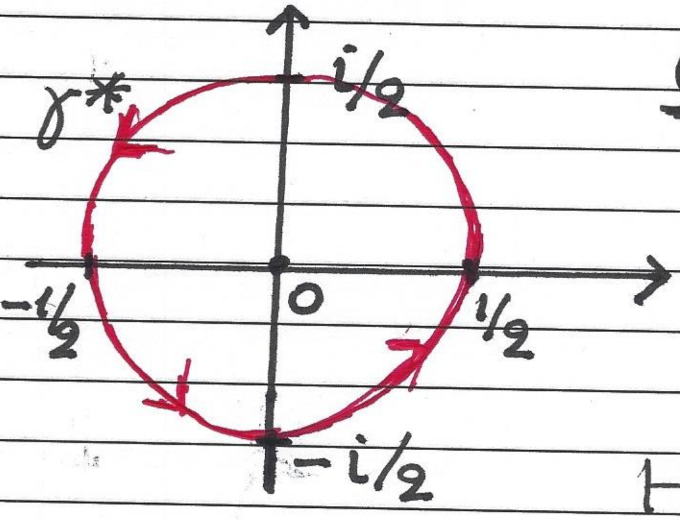
Θεώρημα 3 (**Ισχυρή εκδοχή Θεωρήματος Cauchy – Goursat**):

Έστω γ κλειστή καμπύλη με εσωτερικό $G = \operatorname{int}\gamma^*$ κ' $f : G \cup \gamma^* \to \mathbb{C}$ συνεχής με $f|_G \in \mathcal{H}(G)$. Τότε,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

[Η απόδειξη παραλείπεται.]

Παραδείγματα:



(α) $\gamma(t) = \frac{1}{2}e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $f(z) = \dfrac{e^z}{1+z^2}$.

Η f είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\} = U$ κ' $\gamma^* \subset U$

$\overset{\Theta.3}{\Longrightarrow}$ $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$

(β) $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

$f(z) = \sin(e^{z}) + \bar{z} + |z+1|^2$,
$z \in \mathbb{C}$.

$$\int_\gamma f(z)\,dz = ?$$

f συνεχής στο $\mathbb{C}$ αλλά όχι ολόμορφη (δεν εφαρμόζεται το Θ-Cauchy στην f !!)

Παρ' όλ' αυτά, $\forall\, z \in \gamma^*$, έχουμε

$$|z| = 1 \Rightarrow \bar{z} = 1/z$$

και

$$f(z) = \sin(e^{z}) + \frac{1}{z} + |z|^2 + z + \bar{z} + 1$$

$$= \sin(e^{z}) + \frac{1}{z} + 1 + z + \frac{1}{z} + 1$$

$$= \underbrace{\sin(e^{z}) + z + 2}_{g(z)} + \frac{2}{z}.$$

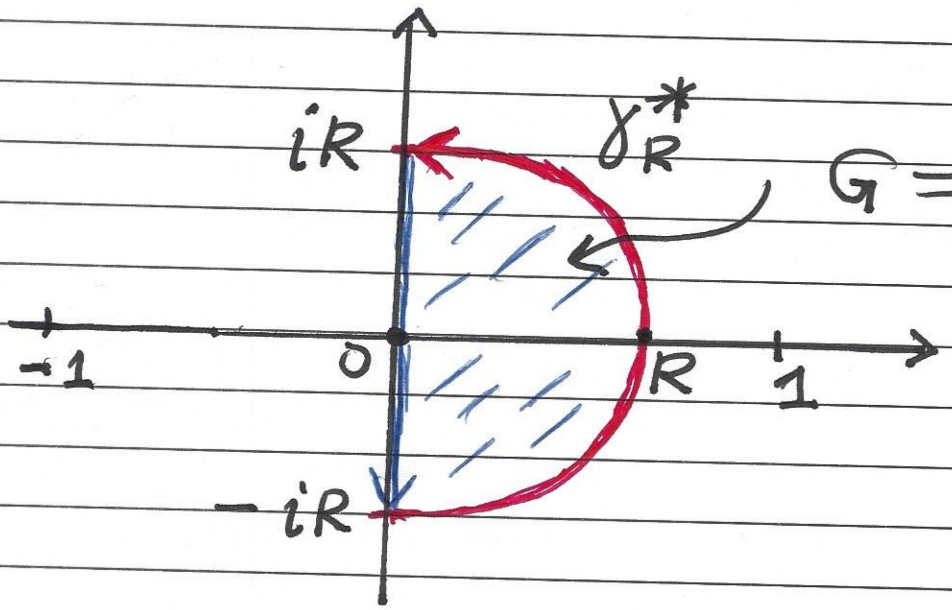
Αλλά, $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\Theta.3} \int_\gamma g(z)\,dz = 0$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 2\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2 \cdot 2\pi i = \underline{\underline{4\pi i}}.$$

(γ) $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$

$f(z) = \frac{1}{z^2-1}$ $\qquad$ $1 > R > 0$

$\int_{\gamma_R} f(z)dz = ?$



Θεωρούμε την κλειστή καμπύλη

$$\Gamma_R = \gamma_R + [iR, -iR].$$

Η Γ_R είναι τμηματικά λεία.

Επιπλέον, $\pm 1 \notin G \cup \Gamma_R^*$

$$\overset{\text{Θ.3}}{\Longrightarrow} \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 0$$

$$\Longrightarrow \int_{\gamma_R} f(z)dz = -\int_{[iR,-iR]} f(z)dz =$$

$$= \int_{[-iR,\, iR]} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(it)\,d(it) =$$

$$= i \int_{-R}^{R} \frac{dt}{-t^2-1} = -2i \int_{0}^{R} \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= -2i \, \mathrm{Arctan}\, t \Big|_0^R = -2i\, \mathrm{Arctan}R.$$

Ακολουθεί μια εφαρμογή στον υπολογισμό γενικευμένων ολοκληρωμάτων.

ΑΣΚΗΣΗ:

(a) Να δείξετε ότι $\lim_{R\to+\infty} \int_{\sigma_R} e^{iz^2}\,dz = 0$,

όπου $\sigma_R(t) = R + it$, $t \in [0, R]$.

(β) Να δείξετε ότι

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\,dt = \int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-2t^2}\,dt \overset{(+)}{=} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

(+) γνωστό από την Ανάλ. ΙΙ.

Λύση:

(α) Για $z = \sigma_R(t) = R + it$, $t \in [0, R]$,

έχουμε

$$iz^2 = i(R^2 - t^2 + 2iRt)$$
$$= -2Rt + i(R^2 - t^2)$$

$$\Rightarrow |e^{iz^2}| = e^{Re(iz^2)} = e^{-2Rt}$$

$$\Rightarrow \left|\int_{\sigma_R} e^{iz^2} dz\right| \overset{(+)}{=} \left|\int_0^R e^{i\sigma_R^2(t)} i\,dt\right|$$

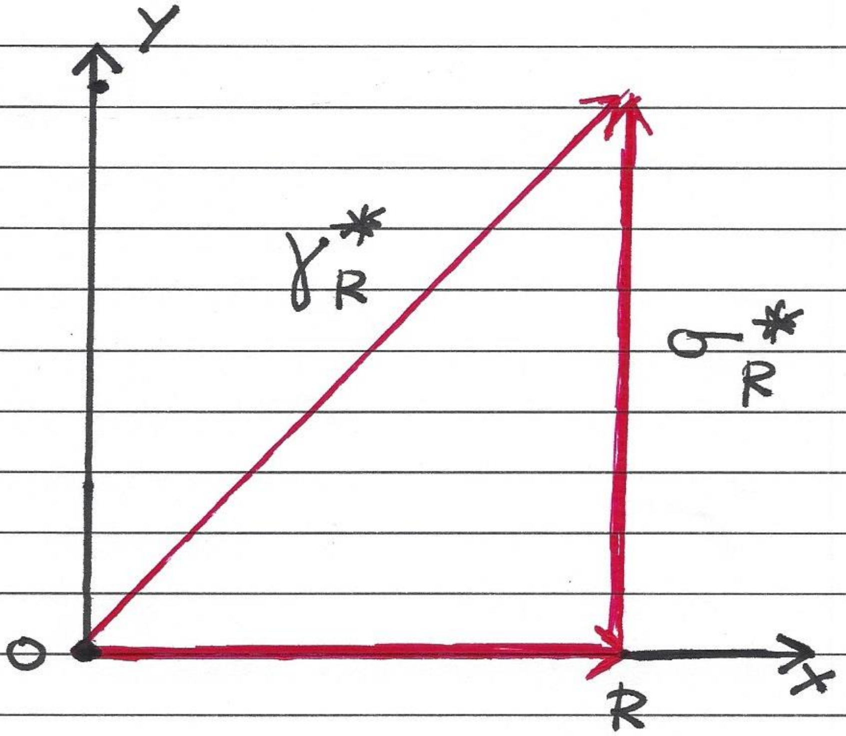
$$\leq \int_0^R |e^{i\sigma_R^2(t)}|\,dt$$

$$= \int_0^R e^{-2Rt}\,dt = \frac{1 - e^{-2R^2}}{2R}$$

$$\xrightarrow{R \to +\infty} 0.$$

(+) [Δεν εξυπηρετεί η ML-ανισότητα!!]

(β)



Θεωρούμε κ' το ευθ. τμήμα

$$\gamma_R(t) = t + it, \quad t \in [0, R]$$

(βλ. σχήμα).

Θέτουμε $\Gamma_R = [0,R] + \sigma_R - \gamma_R$.

Η Γ_R είναι κλειστή, τμημ. λεία $\overset{Θ.3}{\Longrightarrow}$

$$\int_{\Gamma_R} e^{iz^2}\,dz = 0$$

$$\Longrightarrow \int_0^R e^{it^2}\,dt + \int_{\sigma_R} e^{iz^2}\,dz = \int_{\gamma_R} e^{iz^2}\,dz \qquad (2)$$

Αλλά, για $z = t + it = (1+i)t$,

έχουμε $z^2 = 2it^2 \Rightarrow iz^2 = -2t^2$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_R} e^{iz^2} dz = \int_0^R e^{-2t^2}(1+i)\, dt$$

$$= \int_0^R e^{-2t^2} dt + i \int_0^R e^{-2t^2} dt$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} \int_0^R e^{it^2} dt + \int_{\sigma_R} e^{iz^2} dz =$$

$$= \int_0^R e^{-2t^2} dt + i \int_0^R e^{-2t^2} dt.$$

Παίρνοντας στην τελευταία το όριο καθώς $R \to +\infty$, παίρνουμε (λόγω του ερωτ.-(α)),

$$\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-2t^2} dt + i \int_0^{+\infty} e^{-2t^2} dt.$$

Επειδή $e^{it^2} = \cos(t^2) + i\sin(t^2)$, προκύπτει η αποδεικτέα. $\boxtimes$