ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ -ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
11/06/2024
ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2,5 Ω

ΘΕΜΑ 1: (i) (1 μ.) Δίνεται η συνάρτηση $u(x,y) = e^{-y}\cos x + 3x^2y - y^3, \quad x,y \in \mathbb{R}$. Να βρείτε ολόμορφη συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ώστε $\mathrm{Re} f = u, \ \ f(0) = 1 - i$.

(ii) (1 μ.) Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ πεδίο και $f : U \to \mathbb{C}$ συνάρτηση τέτοια ώστε $f^6, \ \overline{f}^5$ ολόμορφες στο U. Να δείξετε ότι f σταθερή.

ΘΕΜΑ 2: (1,5 μ.) Να αναπτύξετε σε σειρά Laurent γύρω από το σημείο $z_0 = 1$ τη συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \ + \ \frac{1}{z+1}\ ,$$

στον ανοικτό δακτύλιο $1 < |z-1| < 2$.

ΘΕΜΑ 3: (1 μ.) Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη με

$$|f'(z)| < |f(z)|, \quad \forall \ \ z \in \mathbb{C}.$$

Να δείξετε ότι υπάρχουν $a, b \in \mathbb{C}$ ώστε $a \neq 0, \ |b| < 1$ και

$$f(z) = ae^{bz}, \quad \forall \ \ z \in \mathbb{C}.$$

[*Υπόδειξη:* Θ. Liouville.]

ΘΕΜΑ 4: (4 μ.) Εάν $\gamma(t) = \dfrac{1}{2}e^{it}, \ t \in [0, 2\pi], \quad a = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$, να δείξετε ότι

$$\int_\gamma \frac{\overline{z}}{e^z - 1}dz = -\frac{\pi i}{4} \ (1 \text{ μ.}), \quad \int_\gamma \frac{\cos(1/z)}{2 - \pi z}dz = -2i \ (1,5 \text{ μ.}),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{(x^4+1)(x^2+1)}dx \ = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{e} \ + \ 2\mathrm{Re}\left(\frac{e^{ia}}{1+a^2}\right)\right] \ (1,5 \text{ μ.}).$$

ΘΕΜΑ 5: Έστω $f : D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη τέτοια ώστε

$$|f(z)| \leq 1, \ \ \forall \ z \in D, \quad f(0) = f'(0) = 0.$$

Να δείξετε ότι:
(i)(0,5 μ.) υπάρχει $g : D \to \mathbb{C}$ ολόμορφη ώστε $f(z) = z^2 g(z), \quad \forall \ z \in D$.
(ii)(1 μ.) $|f(z)| \ \leq \ |z|^2, \quad \forall \ z \in D$.
[*Υπόδειξη:* Στο (ii) να εφαρμόσετε κατάλληλα την Αρχή Μεγίστου.]

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ.

ΘΕΜΑ 1:
(i) Έστω $f = u + iv$ η ζητούμενη. Λόγω των Cauchy-Riemann έχουμε

$$v_y = u_x = -e^{-y} \sin x \ + \ 6xy \tag{1}$$

και

$$v_x = -u_y = e^{-y} \cos x \ - \ 3x^2 \ + \ 3y^2. \tag{2}$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της (1) ως προς y παίρνουμε

$$v = e^{-y} \sin x \ + \ 3xy^2 \ + \ c(x). \tag{3}$$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της (3) ως προς x παίρνουμε

$$v_x = e^{-y} \cos x \ + \ 3y^2 \ + \ c'(x).$$

Η τελευταία σε συνδυασμό με την (2) δίνει

$$c'(x) = -3x^2 \ \Rightarrow \ c(x) = -x^3 + c_1 \ , \quad \text{όπου } c_1 \text{ σταθερά.}$$

Τώρα η (3) δίνει

$$v = e^{-y} \sin x \ + \ 3xy^2 \ - \ x^3 \ + \ c_1 \ .$$

Τέλος,

$$1 - i = f(0) = u(0,0) + iv(0,0) = 1 + ic_1 \ \Rightarrow \ c_1 = -1.$$

Άρα,

$$f(x + iy) = e^{-y} \cos x + 3x^2 y - y^3 \ + \ i(e^{-y} \sin x \ + \ 3xy^2 \ - \ x^3 \ - \ 1), \quad \forall \ x, y \in \mathbb{R}.$$

(ii) Έχουμε

$$f^{30} = (f^6)^5 \ \in \ \mathcal{H}(U), \quad \overline{f^{30}} = (\overline{f}^5)^6 \ \in \ \mathcal{H}(U)$$

$$\Rightarrow \quad f^{30} = \text{σταθερή} \quad \Rightarrow \quad |f|^{30} = |f^{30}| = \text{σταθερή} \quad \Rightarrow \quad |f| = \text{σταθερή}.$$

Τότε,

$$|f^6| = |f|^6 = \text{σταθερή}, \quad |\overline{f}^5| = |f|^5 = \text{σταθερή}$$

$$\Rightarrow \quad f^6 = c_1 \ , \quad \overline{f}^5 = \text{σταθερή} \quad \Rightarrow \quad f^5 = c_2 \ ,$$

$\Rightarrow \quad c_2 f = c_1$, όπου $c_1 , c_2 \ \in \mathbb{C}$ σταθερές.

- Εάν $c_2 = 0$, τότε $f(z)^5 = c_2 = 0 \ \Rightarrow f(z) = 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$.
- Εάν $c_2 \neq 0$, τότε $f(z) = c_1/c_2$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Σε κάθε περίπτωση η f είναι σταθερή.

ΘΕΜΑ 2:

- <u>Ανάπτυγμα για την $\dfrac{1}{z+1}$:</u> Θέτουμε $w = \dfrac{z-1}{2}$ κι έχουμε

$$|w| < 1, \quad \frac{1}{z+1} = \frac{1}{2w+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+w} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-1)^n}{2^{n+1}} .$$

- <u>Ανάπτυγμα για την $\dfrac{1}{z^2}$:</u> Θέτουμε $w = \dfrac{1}{z-1}$ κι έχουμε

$$|w| < 1, \quad z = 1+\frac{1}{w} = \frac{1+w}{w} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{z^2} = w^2 \cdot \frac{1}{(1+w)^2} = -w^2 \left[\frac{1}{1+w}\right]' = -w^2 \left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^n\right]' =$$

$$= -w^2 \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n w^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^{n+1} w^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^{n+1}}{(z-1)^{n+1}} .$$

ΘΕΜΑ 3: Έχουμε

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \quad |f(z)| \;>\; |f'(z)| \;\geq\; 0 \quad \Rightarrow \quad f(z) \neq 0,$$

οπότε η $g = f'/f$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ και $|g(z)| \;<\; 1, \;\; \forall\, z \in \mathbb{C}$.

Από το Θεώρημα Liouville έπεται ότι $g = b \in \mathbb{C}$, για κάποιο $b \in \mathbb{C}$. Τότε, $|b| < 1$ και

$$[\; f(z)e^{-bz}\;]' = f'(z)e^{-bz} \;-\; bf(z)e^{-bz} = e^{-bz}[f'(z) - bf(z)] = 0, \quad \forall\, z \in \mathbb{C},$$

$$\Rightarrow \quad f(z)e^{-bz} = a \quad \Rightarrow \quad f(z) = ae^{bz}, \quad \forall\, z \in \mathbb{C},$$

όπου $a \in \mathbb{C}$. Προφανώς, $a \neq 0$.

ΘΕΜΑ 4:

- $\forall\, z \in \gamma^*$, $|z| = 1/2 \;\Rightarrow\; \overline{z} = 1/4z$ οπότε

$$\int_\gamma \frac{\overline{z}}{e^z - 1} dz = \frac{1}{4}\int_\gamma \frac{dz}{z(e^z-1)} = \frac{1}{4}\int_\gamma f(z)dz,$$

όπου $f(z) = \dfrac{1}{z(e^z-1)}$. Ανώμαλα σημεία της f : $2k\pi i, \;\; k \in \mathbb{Z}$. Από αυτά, μόνο το 0 περιέχεται στο εσωτερικό της γ κι επομένως $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i Res(f,0)$.

Έχουμε

$$e^z - 1 = zA(z), \quad \text{όπου} \quad A(z) = 1 \;+\; \frac{z}{2!} \;+\; \frac{z^2}{3!} \;+\; \ldots, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Προφανώς A ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ (ως δυναμοσειρά που συγκλίνει για $z \in \mathbb{C}$) και

$$A(0) = 1, \quad A'(0) = 1/2.$$

Επειδή $A(0) \neq 0$, υπάρχει ανοικτός δίσκος D κέντρου 0 ώστε η $1/A$ να είναι ολόμορφη στον D και

$$f(z) = \frac{1}{z^2 A(z)}, \quad \forall\, z \in D \setminus \{0\}.$$

Έπεται ότι το 0 είναι πόλος της f τάξης 2 και

$$Res(f,0) = [\ z^2 f(z)\ ]'\,|_{z=0} = -\frac{A'(0)}{A(0)^2} = -1/2 \ \Rightarrow \int_\gamma f(z)dz = -\pi i \quad \Rightarrow \quad \int_\gamma \frac{\overline{z}}{e^z - 1}dz = -\frac{\pi i}{4}.$$

- Θέτουμε $g(z) = \dfrac{\cos(1/z)}{2 - \pi z}$. Ανώμαλα σημεία της $g : 0,\ 2/\pi$. Από αυτά, μόνο το 0 περιέχεται στο εσωτερικό της γ, αφού $2/\pi > 1/2$ κι επομένως $\displaystyle\int_\gamma g(z)dz = 2\pi i Res(g,0)$.

  Για $0 < |z| < 2/\pi$, έχουμε

$$g(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{\pi z}{2}} \cdot \cos\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi z}{2}\right)^n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot \frac{1}{z^{2k}} = \frac{1}{2} \sum_{n,\,k=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{2^n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{n-2k}.$$

  Για $n - 2k = -1$, $n \geq 0$ παίρνουμε $n = 2k-1$ και $k \geq 1$, οπότε ο συντελεστής του $1/z$ στο παραπάνω ανάπτυγμα ισούται με

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi^{2k-1}}{2^{2k-1}} \frac{(-1)^k}{(2k)!} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k} \frac{(-1)^k}{(2k)!} = \frac{1}{\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \ - \ 1\right] = -\frac{1}{\pi}\ .$$

  Συνεπώς, $Res(g,0) = -1/\pi \ \Rightarrow \displaystyle\int_\gamma g(z)dz = -2i.$

- Θέτουμε

$$h(z) = \frac{z^3 e^{iz}}{(z^4+1)(z^2+1)}\ .$$

  Είναι $a^4 = \left(e^{i\pi/4}\right)^4 = e^{i\pi} = -1$, οπότε οι ρίζες του πολυωνύμου $z^4 + 1$ είναι $\pm a,\ \pm\overline{a}$. Επιπλέον, οι ρίζες του τριωνύμου $z^2 + 1$ είναι $\pm i$. Από τις 6 ρίζες του πολυωνύμου $(z^4+1)(z^2+1)$, μόνο οι $a,\ -\overline{a},\ i$ έχουν θετικό φανταστικό μέρος. Επομένως,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx = 2\pi i\,[Res(h,a) + Res(h,-\overline{a}) + Res(h,i)] = J.$$

  Έχουμε

$$Res(h,i) = \frac{\dfrac{z^3 e^{iz}}{z^4+1}}{(z^2+1)'}\,|_{z=i} = \frac{i^3 e^{-1}/2}{2i} = -\frac{1}{4e}\ .$$

  Επίσης, $\forall\, \rho \in \{a,\ -\overline{a}\}$, έχουμε

$$Res(h,\rho) = \frac{\dfrac{z^3 e^{iz}}{z^2+1}}{(z^4+1)'}\,|_{z=\rho} = \frac{\rho^3 e^{i\rho}}{4\rho^3(1+\rho^2)} = \frac{e^{i\rho}}{4(1+\rho^2)}\ .$$

Άρα,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx = 2\pi i\left[\frac{e^{ia}}{4(1+a^2)}+\frac{e^{-i\overline{a}}}{4(1+\overline{a}^2)}-\frac{1}{4e}\right] = \frac{\pi i}{2}\left(-\frac{1}{e}+\frac{e^{ia}}{1+a^2}+\overline{\frac{e^{ia}}{1+a^2}}\right)$$
$$= \frac{\pi i}{2}\left[-\frac{1}{e}+2\mathrm{Re}\left(\frac{e^{ia}}{1+a^2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3\sin x}{(x^4+1)(x^2+1)} = \mathrm{Im}(J) = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{e}+2\mathrm{Re}\left(\frac{e^{ia}}{1+a^2}\right)\right].$$

ΘΕΜΑ 5:

(i) Από Θ. Taylor κι επειδή $f(0)=f'(0)=0$ παίρνουμε

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n = z^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^{n-2}=z^2g(z), \quad \forall\, z\in D,$$

όπου $g(z)=\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^{n-2}$.

(ii) Έστω $z\in D$, δηλ. $|z|<1$. Επιλέγουμε $r\in(|z|,\ 1)$. Από την Αρχή του Μεγίστου στον κλειστό δίσκο $D[0,r]\subset D$ σε συνδυασμό με το (i) και την υπόθεση, παίρνουμε

$$\max_{|w|\le r}|g(w)| = \max_{|w|=r}|g(w)| = \max_{|w|=r}\frac{|f(w)|}{|w|^2} = \max_{|w|=r}\frac{|f(w)|}{r^2} \le \frac{1}{r^2} \quad \Rightarrow \quad |g(z)| \le \frac{1}{r^2}.$$

Αλλά η τελευταία ισχύει $\forall\, r\in(|z|,\ 1)$, οπότε παίρνοντας το όριο καθώς $r\to 1^-$, προκύπτει ότι

$$|g(z)| \le 1 \quad \Rightarrow \quad |f(z)| = |z|^2|g(z)| \le |z|^2.$$