



# Γραμμική Άλγεβρα

## 9. Εύρεση Αντίστροφου Πίνακα με Στοιχειώδεις Πράξεις Γραμμών

Κάλλια Παυλοπούλου

2023-2024

## Εύρεση Αντίστροφου πίνακα (με στοιχειώδεις πράξεις)

Δίνεται ο τετραγωνικός πίνακας  $A = [\alpha_{ij}] \in M_{\mu \times \mu}$ .

Αν γράψουμε δίπλα στον πίνακα  $A$  τον μοναδιαίο  $I_\mu$  και εφαρμόσουμε και στους δύο ταυτόχρονα (δηλαδή στον πίνακα  $[A|I_\mu]$  διαστάσεων  $\mu \times 2\mu$ ) τις ίδιες στοιχειώδεις πράξεις γραμμών, ώστε ο πίνακας  $A$  να μετασχηματιστεί σε ανηγμένο κλιμακωτό  $A_R$ , δηλαδή

$$[A|I_\mu] \rightarrow \dots \rightarrow [A_R|B]$$

τότε θα ισχύει:

- ❖ Αν  $A_R = I_\mu$  τότε ο πίνακας  $A$  είναι αντιστρέψιμος και  $B = A^{-1}$ .
- ❖ Αν  $A_R \neq I_\mu$  τότε ο πίνακας  $A$  δεν είναι αντιστρέψιμος.

## Παράδειγμα 1

Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ , με στοιχειώδεις γραμμοπράξεις.

Λύση:

$$[A|I_3] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\gamma_2 \rightarrow \gamma_2 - 2\gamma_1 \\ \gamma_3 \rightarrow \gamma_3 - 3\gamma_1}}$$

$A$        $I_3$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_2 \rightarrow -1 \cdot \gamma_2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_3 \rightarrow \gamma_3 + 2 \cdot \gamma_2}$$

## Παράδειγμα 1 (συνέχεια)

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_2 \rightarrow \gamma_2 - 2 \cdot \gamma_3} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} \gamma_1 \rightarrow \gamma_1 - 3 \cdot \gamma_3 \\ \gamma_1 \rightarrow \gamma_1 - 2 \cdot \gamma_2 \end{array}}$$

$A_R$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right] = [I_3 | B]$$

Αντίστροφος  $A^{-1}$

Μοναδιαίος  
 $3 \times 3$

Ο πίνακας  $A_R$  που προέκυψε από τις γραμμοπράξεις είναι ίσος με τον  $I_3$ .  
Δηλαδή, ο  $A$  είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον  $I_3$ .

Άρα ο πίνακας  $A$  είναι αντιστρέψιμος με

$$A^{-1} = B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

## Παράδειγμα 2

Δίνονται οι πίνακες  $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$  και  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \alpha \end{bmatrix}$  με  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Να εξεταστεί αν υπάρχει ο αντίστροφός τους και αν ναι, να τον υπολογίσετε με τη βοήθεια των γραμμοπράξεων.

Λύση: α)  $[A|I_2] = \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 12 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_2 \rightarrow \gamma_2 - 3\gamma_1} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{array} \right]$

$A_R$

Ο πίνακας που προέκυψε από τις γραμμοπράξεις, ο  $A_R$ , δεν είναι ίσος με τον  $I_2$ .  
Δηλαδή, ο  $A$  δεν είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον  $I_2$ .



Άρα ο πίνακας  $A$  **δεν** είναι αντιστρέψιμος.

## Παράδειγμα 2-συνέχεια

β) Για τον πίνακα  $B$  έχουμε:

$$[B|I_2] = \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & \alpha & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_2 \rightarrow \gamma_2 - 3\gamma_1} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 6 & -3 & 1 \end{array} \right].$$

Παρατηρούμε ότι

1) αν  $\alpha - 6 = 0$ , δηλαδή  $\alpha = 6$ , τότε ο τελευταίος πίνακας παίρνει τη μορφή:

$$B_R \quad \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{array} \right]$$

Ο πίνακας  $B_R$ , δεν είναι ίσος με τον  $I_2$ .  
Άρα ο  $B$  δεν είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον  $I_2$ .

Άρα ο πίνακας  $B$  **δεν** είναι αντιστρέψιμος.

## Παράδειγμα 2-συνέχεια

2) Αν όμως  $\alpha \neq 6$ , τότε ο πίνακας

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 6 & -3 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_2 \rightarrow \frac{1}{\alpha-6}\gamma_2} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-3}{\alpha-6} & \frac{1}{\alpha-6} \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\gamma_1 \rightarrow \gamma_1 - 2\gamma_2} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{\alpha}{\alpha-6} & -\frac{2}{\alpha-6} \\ 0 & 1 & \frac{-3}{\alpha-6} & \frac{1}{\alpha-6} \end{array} \right] = [I_2 | B^{-1}].$$

$$B_R = I_2$$

$$B^{-1}$$

Άρα

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{\alpha-6} & -\frac{2}{\alpha-6} \\ \frac{-3}{\alpha-6} & \frac{1}{\alpha-6} \end{bmatrix}, \text{ για } \alpha \neq 6.$$

# Υπενθύμιση (για πίνακα $A \in M_{\mu \times \mu}$ )

- Ο πίνακας  $A$  είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν η ορίζουσά του είναι διάφορη του μηδενός.
- Ο πίνακας  $A$  είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν το ομογενές σύστημα ( $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ )  $\mu$  εξισώσεων με  $\mu$  αγνώστους και πίνακα συντελεστών  $A$  έχει μία και μοναδική λύση τη μηδενική.
- Ο πίνακας  $A$  είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν ο πίνακας  $A$  είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον μοναδιαίο  $I_{\mu}$ .