



Γραμμική Άλγεβρα
Ασκήσεις
9α. Εύρεση Αντίστροφου Πίνακα με
Στοιχειώδεις Πράξεις

Κάλλια Παυλοπούλου

2023-2024

Άσκηση 1

Να εξεταστεί αν ο A είναι αντιστρέψιμος για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.
Στην περίπτωση που είναι αντιστρέψιμος, να βρεθεί ο αντίστροφός του.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Λύση:

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & \alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_2 \rightarrow \gamma_2 - 3\gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \alpha - 6 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_2 \leftrightarrow \gamma_3}$$

Άσκηση 1-λύση (συνέχεια)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & \alpha - 6 & -3 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_3 \rightarrow \gamma_3 - 2\gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha - 8 & -3 & 1 & -2 \end{array} \right]$$

Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:

1) Αν $\alpha = 8$, τότε ο τελευταίος πίνακας παίρνει τη μορφή:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & -2 \end{array} \right]$$

Άρα ο A δεν είναι αντιστρέψιμος .

Άσκηση 1-λύση (συνέχεια)

2) Αν $\alpha \neq 8$, τότε συνεχίζουμε τις γραμμοπράξεις εφαρμόζοντας στον τελευταίο πίνακα την $\gamma_3 \rightarrow \frac{1}{\alpha-8} \cdot \gamma_3$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-3}{\alpha-8} & \frac{1}{\alpha-8} & \frac{-2}{\alpha-8} \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_2 \rightarrow \gamma_2 - \gamma_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{\alpha-8} & \frac{-1}{\alpha-8} & \frac{\alpha-6}{\alpha-8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-3}{\alpha-8} & \frac{1}{\alpha-8} & \frac{-2}{\alpha-8} \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_1 \rightarrow \gamma_1 - 2\gamma_3}$$

Άσκηση 1-λύση (συνέχεια)

Η τελική μορφή του πίνακα (ανηγμένη κλιμακωτή) είναι η εξής:

Μοναδιαίος
 3×3

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{\alpha-2}{\alpha-8} & \frac{-2}{\alpha-8} & \frac{4}{\alpha-8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{\alpha-8} & \frac{-1}{\alpha-8} & \frac{\alpha-6}{\alpha-8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-3}{\alpha-8} & \frac{1}{\alpha-8} & \frac{-2}{\alpha-8} \end{array} \right]$$

Αντίστροφος A^{-1}

Επομένως για $\alpha \neq 8$

ο A είναι αντιστρέψιμος

και ο αντίστροφός του είναι ο A^{-1}

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha-2}{\alpha-8} & \frac{-2}{\alpha-8} & \frac{4}{\alpha-8} \\ \frac{3}{\alpha-8} & \frac{-1}{\alpha-8} & \frac{\alpha-6}{\alpha-8} \\ \frac{-3}{\alpha-8} & \frac{1}{\alpha-8} & \frac{-2}{\alpha-8} \end{bmatrix}$$

Άσκηση 2

Να βρεθεί με τη βοήθεια των γραμμοπράξεων, αν υπάρχει, ο

αντίστροφος πίνακας του $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & \alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in R$.

Λύση

Εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο εύρεσης αντιστρόφου:

$$[B|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & \alpha & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_1 \leftrightarrow \gamma_2}$$

Άσκηση 2-λύση (συνέχεια)

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & a & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_2 \rightarrow \gamma_2 - 2\gamma_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ \boxed{5} & -1 & a & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_3 \rightarrow \gamma_3 - 5\gamma_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & a-5 & 0 & -5 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_3 \rightarrow \gamma_3 + 6\gamma_2}$$

Άσκηση 2-λύση (συνέχεια)

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} \mathbf{1} & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & a-11 & 6 & -17 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_1 \rightarrow \gamma_1 - \gamma_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} \mathbf{1} & 0 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{a-11} & 6 & -17 & 1 \end{array} \right]$$

Στο σημείο αυτό διακρίνουμε περιπτώσεις:

1) Αν $\mathbf{a=11}$, τότε ο πίνακας \underline{B} δεν αντιστρέφεται .

Άσκηση 2-λύση (συνέχεια)

2) Αν $\alpha \neq 11$, τότε συνεχίζουμε τις στοιχειώδεις πράξεις γραμμών εφαρμόζοντας στον τελευταίο πίνακα την $\gamma_3 \rightarrow \frac{1}{\alpha-11} \cdot \gamma_3$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 0 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{\alpha-11} & \frac{-17}{\alpha-11} & \frac{1}{\alpha-11} \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_2 \rightarrow \gamma_2 + \gamma_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 0 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 + \frac{6}{\alpha-11} & -2 + \frac{-17}{\alpha-11} & \frac{1}{\alpha-11} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{6}{\alpha-11} & \frac{-17}{\alpha-11} & \frac{1}{\alpha-11} \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_1 \rightarrow \gamma_1 - 2\gamma_3}$$

Άσκηση 2-λύση (συνέχεια)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 - \frac{12}{\alpha - 11} & 3 + \frac{34}{\alpha - 11} & \frac{-2}{\alpha - 11} \\ 0 & 1 & 0 & 1 + \frac{6}{\alpha - 11} & -2 + \frac{-17}{\alpha - 11} & \frac{1}{\alpha - 11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{\alpha - 11} & \frac{-17}{\alpha - 11} & \frac{1}{\alpha - 11} \end{array} \right]$$

Μοναδιαίος 3×3

Αντίστροφος B^{-1}

Άρα για $a \neq 11$ ο πίνακας B αντιστρέφεται και ο αντίστροφός του είναι ο B^{-1} που φαίνεται παραπάνω.

Άλυτες Ασκήσεις για εξάσκηση

1) Να βρεθεί με τη βοήθεια των γραμμοπράξεων, αν υπάρχει, ο αντίστροφος πίνακας του

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & 7 & 5 \end{bmatrix}.$$

Υπόδειξη: Εφαρμόζοντας στοιχειώδεις πράξεις γραμμών στον πίνακα $[C|I_3]$ με σκοπό να κάνουμε τον C ανηγμένο κλιμακωτό καταλήγουμε ότι ο C είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι ο :

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 27 & 19 & -7 \\ 4 & 3 & -1 \\ -11 & -8 & 3 \end{bmatrix}.$$

Άλυτες Ασκήσεις για εξάσκηση

2) Να βρεθεί με τη βοήθεια των γραμμοπράξεων, αν υπάρχει, ο αντίστροφος πίνακας του

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -1 \end{bmatrix}.$$

Υπόδειξη: Εφαρμόζοντας στοιχειώδεις πράξεις γραμμών στον πίνακα $[D|I_3]$ με σκοπό να κάνουμε τον D ανηγμένο κλιμακωτό καταλήγουμε ότι ο D δεν είναι αντιστρέψιμος διότι είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον:

$$D_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7/3 \\ 0 & 1 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Άλυτες Ασκήσεις για εξάσκηση

3) Να βρεθεί με τη βοήθεια των γραμμοπράξεων, αν υπάρχει, ο αντίστροφος πίνακας του

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Υπόδειξη: Εφαρμόζοντας στοιχειώδεις πράξεις γραμμών στον πίνακα $[F|I_3]$ με σκοπό να κάνουμε τον F ανηγμένο κλιμακωτό καταλήγουμε ότι ο F είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι ο :

$$F^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 4 & -3 \\ 7 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$