



## 8. Επίλυση ενός συστήματος $3 \times 3$

Κάλλια Παυλοπούλου

2023-2024

# Σύστημα γραμμικών εξισώσεων $3 \times 3$ , τρεις εξισώσεις και τρεις αγνώστους

Αλγεβρική επίλυση

2

## Παράδειγμα 1:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$$

Ως προς τις γραμμές

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$$

Επίλυση με εξισώσεις

Επίλυση με τη βοήθεια πινάκων

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

# Λύση γραμμικού συστήματος $3 \times 3$

## Λύση συμβολικά με εξισώσεις

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases} \xrightarrow{\varepsilon\xi_2 \rightarrow \varepsilon\xi_2 - 2\varepsilon\xi_1}$$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2y - 7z = -17 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases} \xrightarrow{\varepsilon\xi_3 \rightarrow \varepsilon\xi_3 - 3\varepsilon\xi_1}$$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2y - 7z = -17 \\ 3y - 11z = -27 \end{cases} \xrightarrow{\varepsilon\xi_2 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \varepsilon\xi_2}$$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ y - \frac{7}{2}z = -\frac{17}{2} \\ 3y - 11z = -27 \end{cases} \xrightarrow{\varepsilon\xi_3 \rightarrow \varepsilon\xi_3 - 3\varepsilon\xi_2}$$

## Λύση με χρήση πινάκων

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_2 \rightarrow \gamma_2 - 2\gamma_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_3 \rightarrow \gamma_3 - 3\gamma_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_2 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \gamma_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_3 \rightarrow \gamma_3 - 3\gamma_2}$$

# Λύση γραμμικού συστήματος $3 \times 3$

## Λύση συμβολικά με εξισώσεις

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ y - \frac{7}{2} \cdot z = -\frac{17}{2} \xleftrightarrow{\varepsilon\xi_3 \rightarrow -2\varepsilon\xi_3} \\ -\frac{1}{2} \cdot z = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ y - \frac{7}{2} \cdot z = -\frac{17}{2} \xleftrightarrow{\varepsilon\xi_2 \rightarrow \varepsilon\xi_2 + \frac{7}{2} \cdot \varepsilon\xi_3} \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ y = 2 \xleftrightarrow{\varepsilon\xi_1 \rightarrow \varepsilon\xi_1 - 2\varepsilon\xi_3} \\ z = 3 \end{cases}$$

## Λύση με χρήση πινάκων

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_3 \rightarrow -2\gamma_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_2 \rightarrow \gamma_2 + \frac{7}{2} \cdot \gamma_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_1 \rightarrow \gamma_1 - 2\gamma_3}$$

# Λύση γραμμικού συστήματος $3 \times 3$

5

## Λύση συμβολικά με εξισώσεις

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases} \xleftrightarrow{\varepsilon\xi_1 \rightarrow \varepsilon\xi_1 - \varepsilon\xi_2}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Το σύστημα έχει μία και μοναδική  
λύση την  
 $x = 1, y = 2, z = 3$

## Λύση με χρήση πινάκων

$$\left[ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_1 \rightarrow \gamma_1 - \gamma_2}$$

$$\left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

Το σύστημα έχει μία και μοναδική  
λύση την  $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

# Σύστημα γραμμικών εξισώσεων $3 \times 3$ , με μία και μοναδική λύση

## Γεωμετρική Ερμηνεία

6

### Παράδειγμα 1:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$$

Ως προς τις γραμμές

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$$

Ως προς τις στήλες

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases} \quad x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## Παράδειγμα 1:

Σύστημα γραμμικών εξισώσεων  $3 \times 3$ ,  
με μία και μοναδική λύση

7

## Γεωμετρική Ερμηνεία

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$$

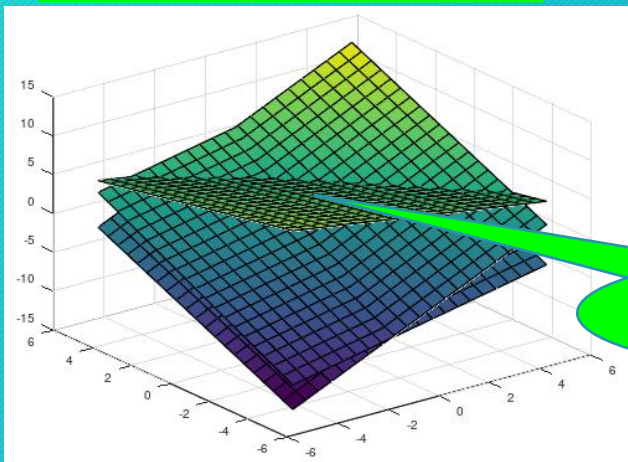
Ως προς τις  
γραμμές

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$$

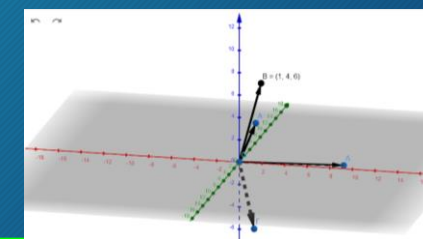
Το σύστημα έχει μία  
και μοναδική λύση την  
 $x = 1, y = 2, z = 3$

Ως προς τις  
στήλες

$$x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



το σημείο τομής των  
τριών επιπέδων  $(1, 2, 3)$



Τρία διανύσματα στον χώρο  $R^3$

Τρία επίπεδα στον χώρο  $R^3$

... που τέμνονται σε ένα μοναδικό σημείο  
με συντεταγμένες  $(x, y, z) = (1, 2, 3)$

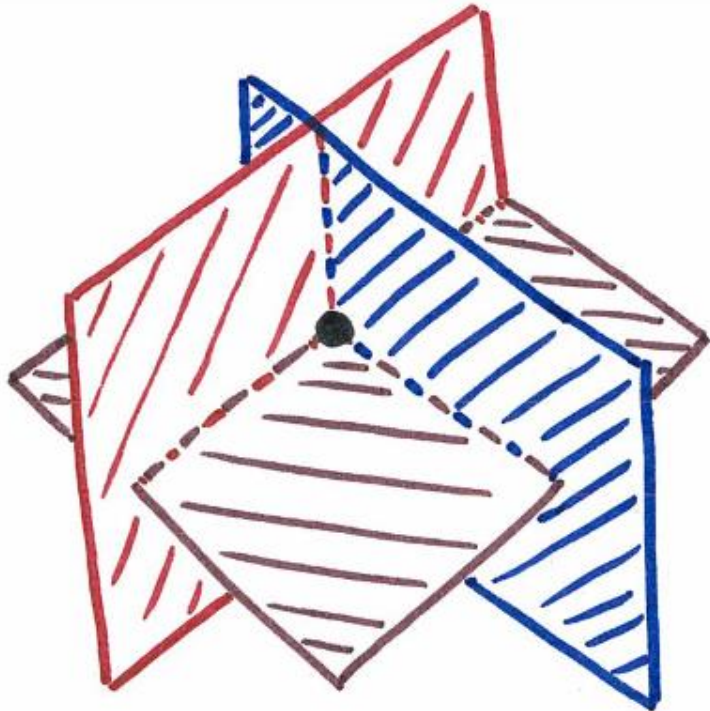
... ένας μοναδικός γραμμικός συνδυασμός τους  
μπορεί να δημιουργήσει το διάνυσμα  $\begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

... Αυτός ο μοναδικός γραμμικός συνδυασμός  
προκύπτει για  $x = 1, y = 2, z = 3$

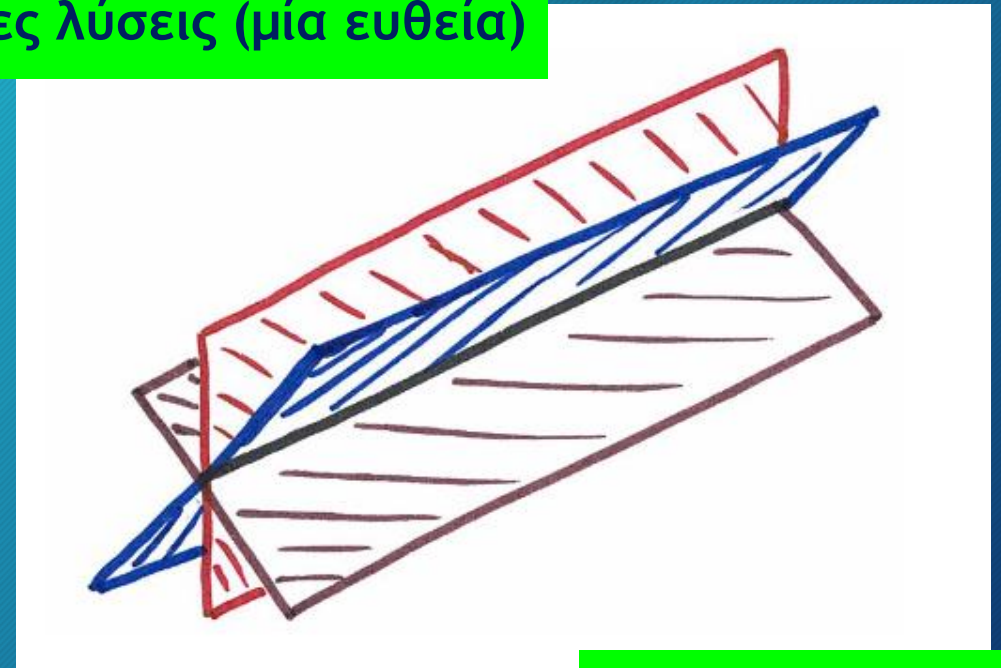
# Δυνατές περιπτώσεις γραμμικού συστήματος $3 \times 3$

8

Μία και μοναδική λύση (ένα σημείο)



Άπειρες λύσεις (μία ευθεία)



multiple solutions

three linear equations in three variables, unique solution

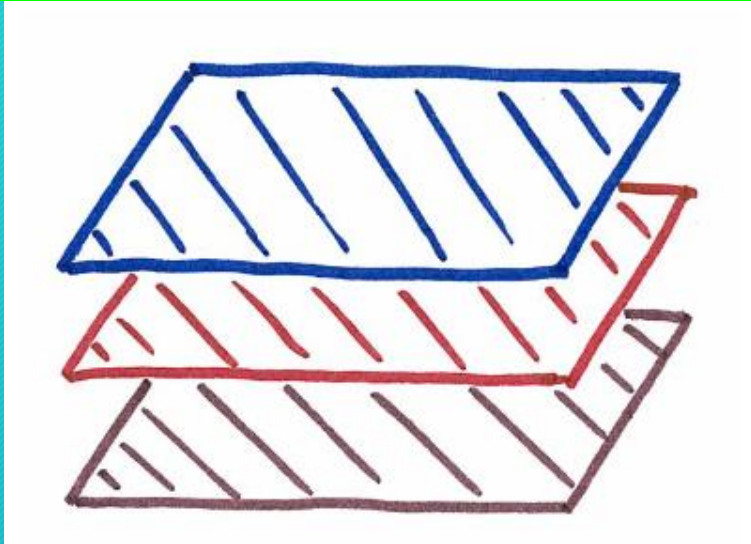
<https://www.math.utah.edu/~wortman/1050-text-lei3v.pdf>



# Δυνατές περιπτώσεις γραμμικού συστήματος $3 \times 3$

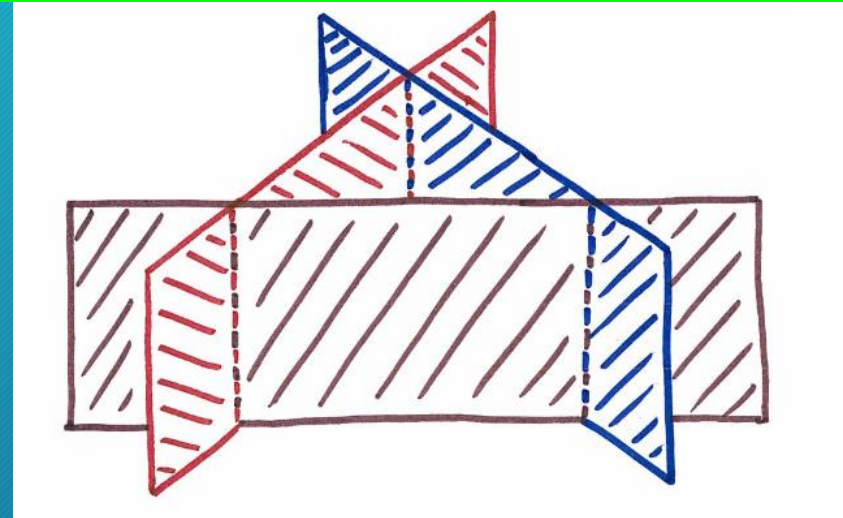
9

Καμία λύση (τρία παράλληλα επίπεδα)



Three parallel planes. There is no point common to all three planes, and hence the system will not have any solutions.

Καμία λύση  
(τρία επίπεδα που τέμνονται ανά δύο)



There might not be a point that lies on all three planes even if the planes aren't parallel. In this case, there is no solution at all.

# Παράδειγμα συστήματος γραμμικών εξισώσεων $3 \times 3$ με μία και μοναδική λύση

10

Παράδειγμα 2 :

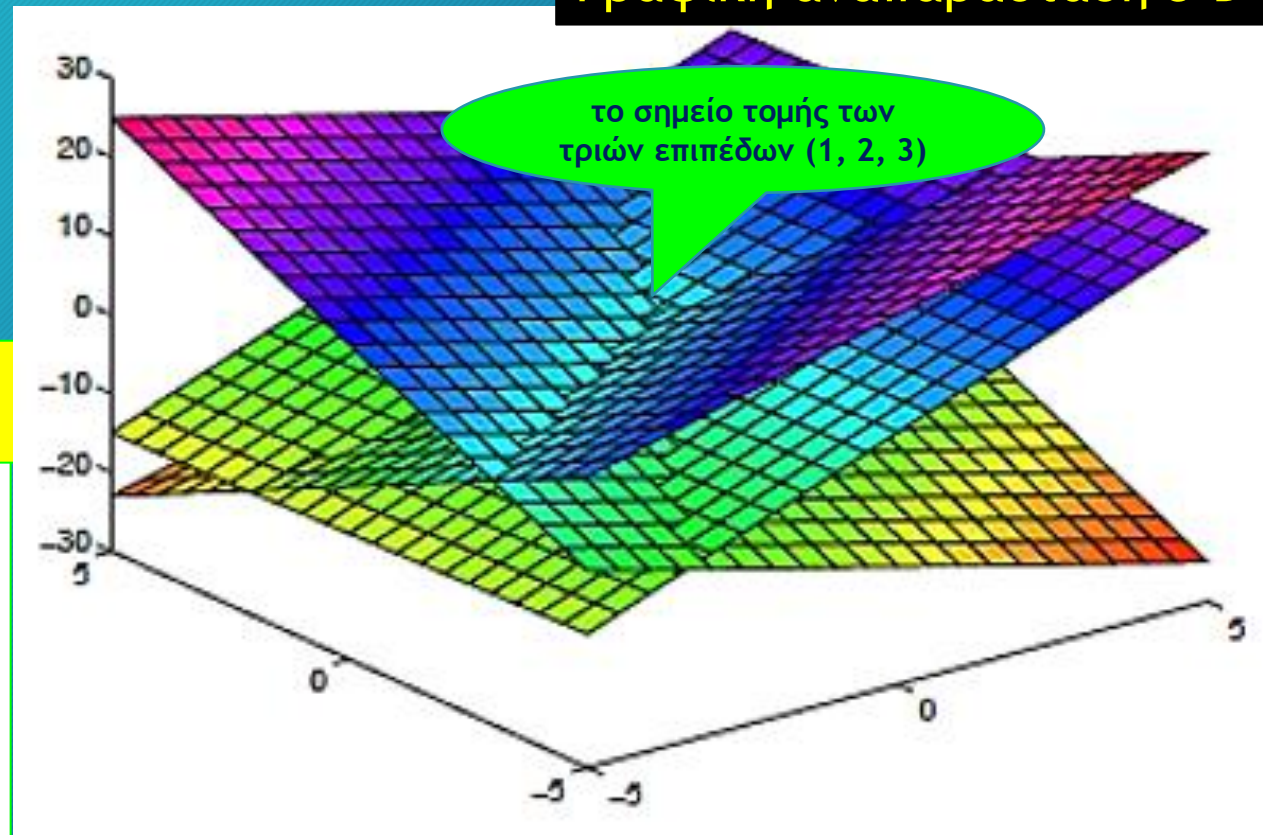
$$\begin{cases} -2x + 3y + z = 2 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ -3x + 0.2y + z = 1 \end{cases}$$

Γραφική αναπαράσταση 3-D

Τρία επίπεδα στον χώρο  $R^3$

... που τέμνονται σε ένα σημείο

Το σύστημα έχει μία και μοναδική λύση



```
[x,y] = meshgrid(-5:0.5:5);  
z = 2*x - 3*y + 2;  
surf(x,y,z)  
hold  
z = -2*x + 3*y;  
surf(x,y,z)  
hold  
z = 3*x - 0.2*y + 1;  
surf(x,y,z)
```

# Παράδειγμα συστήματος γραμμικών εξισώσεων $2 \times 3$ δύο εξισώσεις και τρεις άγνωστοι

11

Παράδειγμα 2 :

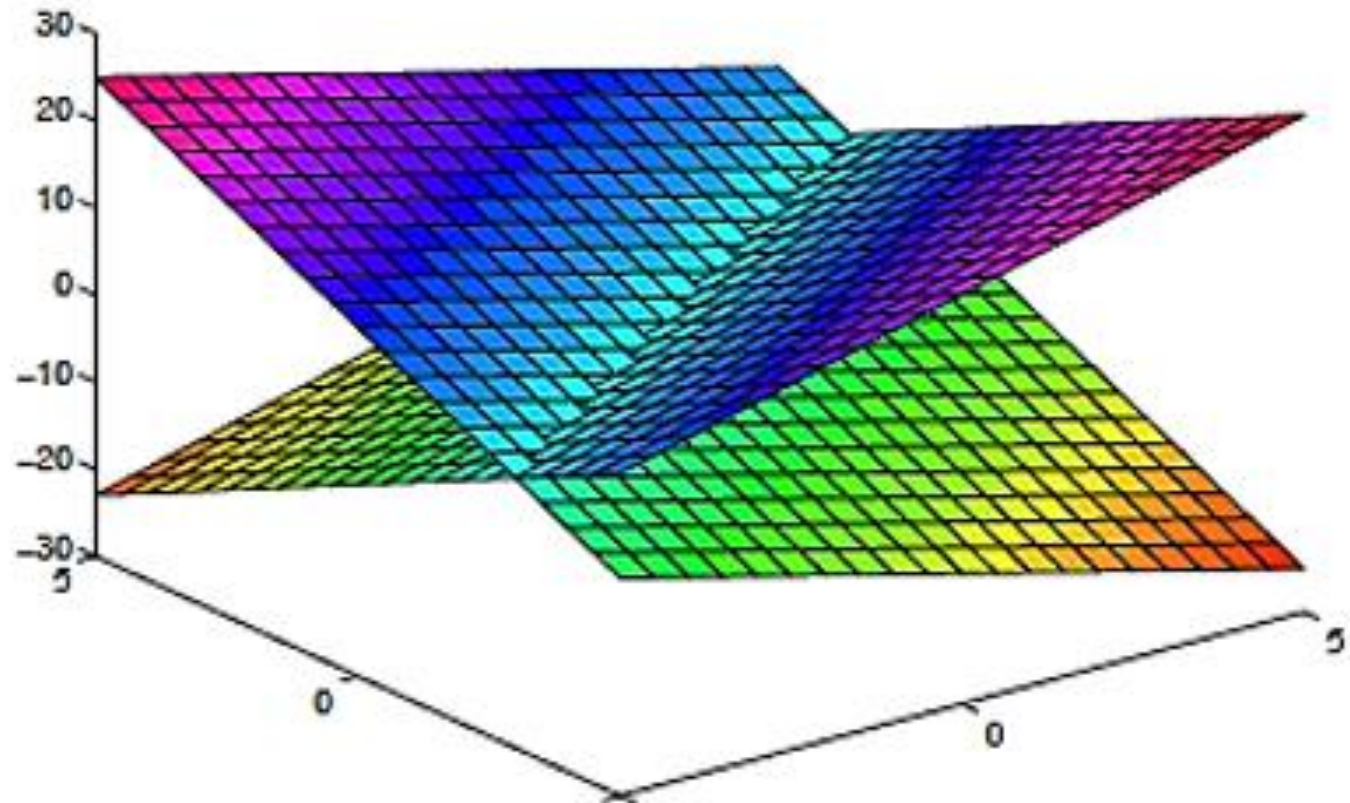
$$\begin{cases} -2x + 3y + z = 2 \\ 2x - 3y + z = 0 \end{cases}$$

Γραφική αναπαράσταση 3-D

Δύο επίπεδα στον χώρο  $R^3$

... που τέμνονται σε μία ευθεία

Το σύστημα άπειρες λύσεις



```
[x,y] = meshgrid(-5:0.5:5);  
z = 2*x - 3*y + 2;  
surf(x,y,z)  
hold  
z = -2*x + 3*y;  
surf(x,y,z)
```

# Σύστημα γραμμικών εξισώσεων $2 \times 3$ , δύο εξισώσεις και τρεις άγνωστοι

12

Παράδειγμα 3 :

$$\begin{cases} -2x + 3y + z = 2 \\ 2x - 3y - z = -24 \end{cases}$$

Δύο επίπεδα στον χώρο  $R^3$

Δύο επίπεδα παράλληλα

Το σύστημα αδύνατο

```
[x,y] = meshgrid(-5:0.5:5);  
z = 2*x - 3*y + 2;  
surf(x,y,z)  
hold  
z = 2*x - 3*y + 24;  
surf(x,y,z)
```



Γραφική αναπαράσταση 3-D

