11/01/2024

Φυλλάδιο I

(10) (i) Να δ.ο. κάθε συμπαγής μετρικός είναι διαχωρίσιμος.

Απόδειξη: Έστω (X,d) μ.χ.

$\forall n \geq 1$, θεωρώ την ανοικτή κάλυψη $\{B(x,\frac{1}{n}) : x \in X\}$

$\xRightarrow{(X \text{ συμπαγής})}$ $\exists$ D_n πεπερασμένο $\mid$ $X = \bigcup_{x \in D_n} B(x, \frac{1}{n})$.

Θέτω $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ = αριθμήσιμο.

Το D είναι πυκνό. Πράγματι έστω $x \in X$, $\varepsilon > 0$.
$\exists$ $N \geq 1$ $\mid$ $\frac{1}{N} < \varepsilon$.

Αλλά, $X = \bigcup_{z \in D_N} B(z, \frac{1}{N}) \Rightarrow \exists z \in D_N \mid x \in B(z, \frac{1}{N})$
$\Longrightarrow d(x,z) < \frac{1}{N} < \varepsilon$.

<u>(ii)</u> Έστω X διαχωρίσιμος χώρος με νόρμα και

$A \subseteq B_{X^*}$ ώστε $\bigcap_{f \in A} \ker f = \{0\}$ (δηλ. A χωρίζει σημεία του X).

Να δ.ο. $\exists\, B$ αριθμήσιμο $\subseteq A \mid \bigcap_{f \in B} \ker f = \{0\}$.

Επειδή X διαχωρίσιμος, ο (B_{X^*}, w^*) είναι συμπαγής μετρικοποιήσιμος

$\overset{(i)}{\Longrightarrow}$ ο (B_{X^*}, w^*) είναι διαχωρίσιμος $\Rightarrow$ (A, w^*) διαχωρίσιμος

$\Rightarrow$ $\exists\, D \subseteq A$ αριθμήσιμο $\mid$ D w^*-πυκνό στο A δηλ.

$\overline{D}^{w^*} = A$. Θα δ.ο. $\bigcap_{f \in D} \ker f = \{0\}$.

Έστω $x \in \bigcap_{f \in D} \ker f \Longrightarrow \forall f \in D$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow e(x)(f) = 0$

όπου $e: X \to X^{**}$ η κανονική ισομετρική εμφ.

Η $e(x) : (X^*, w^*) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής

$\Longrightarrow g = e(x)|_A : (A, w^*) \to \mathbb{R}$ " "

κ' $g(D) = \{0\}$ $\xRightarrow[\text{στο } A)]{(D\ w^*\text{-πυκνό}}$ $g(A) = \{0\}$

$\Longrightarrow \forall f \in A, \quad e(x)(f) = 0 \iff f(x) = 0$

δηλ. $x \in \bigcap_{f \in A} \ker f = \{0\} \Longrightarrow x = 0.$

Άρα, $\bigcap_{f \in D} \ker f = \{0\}$ κ' $D \subseteq A$ αριθμήσιμο. $\boxtimes$

__Επεξήγηση:__ $\bigcap_{f\in A} \ker f = \{0\} \Leftrightarrow A$ χωρίζει σημεία στον X.

$(\Rightarrow)$ Έστω $x, y \in X$ με $x \neq y$. Τότε, $x - y \neq 0$

$\Rightarrow x - y \notin \bigcap_{f\in A} \ker f = \{0\} \Rightarrow \exists f \in A \mid x - y \notin \ker f$

$\Rightarrow f(x-y) \neq 0$

$\Rightarrow f(x) - f(y) \neq 0$

$\Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

$(\Leftarrow)$ Έστω $x \neq 0 \Rightarrow \exists f_0 \in A \mid f_0(x) \neq f_0(0) = 0$

$\Rightarrow x \notin \ker f_0 \Rightarrow x \notin \bigcap_{f\in A} \ker f$.

(16) Έστω X, Y χώροι με νόρμα κ' $T: X \to Y$ γραμμικός.
Ο T λέγεται

→ <u>συμπαγής</u> αν $\overline{T(B_X)}^{\|\cdot\|}$ $\|\cdot\|$ – συμπαγές στον Y.

→ <u>ισχυρά συνεχής</u> αν $\forall (x_n) \subseteq X$, $x \in X$ με $x_n \xrightarrow{w} x$, ισχύει $T(x_n) \xrightarrow{\|\cdot\|} T(x)$.

(i) Να δ.ο. κάθε συμπαγής τελεστής είναι ισχυρά συνεχής.

<u>Απόδ:</u> Έστω $T: X \to Y$ συμπαγής κ' $x_n \xrightarrow{w} x$. Θα δ.ο. $\|T(x_n) - T(x)\| \xrightarrow{n} 0$.
Υποθέσουμε ότι δεν ισχύει, δηλ. $\|T(x_n) - T(x)\| \not\to 0$.

Τότε, $\exists\, k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ ακολουθία φυσικών κ' $\exists\, \varepsilon > 0 \mid \forall n \geq 1$, $\|T(x_{k_n}) - T(x)\| \geq \varepsilon$. $(+)$

Επειδή $x_n \xrightarrow{w} x$, το $K = \{x_n : n \geq 1\} \cup \{x\}$

είναι w-συμπαγές $\Longrightarrow$ K $\|\cdot\|$-φραγμένο

$\Longrightarrow$ $\sup_n \|x_n\| = M < \infty$

$\Longrightarrow$ $\forall n$, $x_n \in MB_X \Longrightarrow T(x_n) \in M\,T(B_X)$

κ' $\overline{MT(B_X)}^{\|\cdot\|} = M\,\overline{T(B_X)}^{\|\cdot\|}$ = $\|\cdot\|$-συμπαγές στον Y

$\Longrightarrow$ η $(T(x_{\kappa_n}))$ περιέχεται σε ένα $\|\cdot\|$-συμπαγές $\subseteq Y$

$\Longrightarrow$ $\exists$ $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$ λ φυσικοί κ' $\exists y \in Y \mid$

$\|T(x_{\kappa_{\lambda_n}}) - y\| \xrightarrow{n} 0$.

Αλλά $x_n \xrightarrow{w} x$ κ' T w-w συνεχής (αφού είναι φραγμένος, βλ. άσκ. 9(iii)) άρα $T(x_n) \xrightarrow{w} T(x)$

$\Rightarrow \quad T(x_{k_{\lambda_n}}) \xrightarrow{w} T(x)$ και

$T(x_{k_{\lambda_n}}) \xrightarrow{\|\cdot\|} y \Rightarrow T(x_{k_{\lambda_n}}) \xrightarrow{w} y$

$\Rightarrow \quad y = T(x)$

$\Rightarrow \quad \|T(x_{k_{\lambda_n}}) - T(x)\| \xrightarrow{n} 0$ (Άτοπο)

διότι $\forall n \geq 1$, $\|T(x_{k_{\lambda_n}}) - T(x)\| \geq \varepsilon$. $\boxtimes$

(στ) Εάν $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ κ' $a_n \not\to 0 \Longrightarrow \exists\, \varepsilon > 0 \mid \forall n_0, \exists\, n > n_0 \mid$ $|a_n| \geq \varepsilon$.

$\underline{n_0 = 1}$ $\exists\, k_1 > 1 \mid$ $|a_{k_1}| \geq \varepsilon$.

$\underline{n_0 = k_1}$ $\exists\, k_2 > k_1 \mid$ $|a_{k_2}| \geq \varepsilon$.

$n_0 = k_2$ $\exists\, k_3 > k_2 \mid$ $|a_{k_3}| \geq \varepsilon$ κ.ο.κ.

$k_1 < k_2 < k_3 < \dots$

$|a_{k_n}| \geq \varepsilon$, $\forall n$

(ii) Εάν X ανακλαστικός, τότε

T συμπαγής ανν T ισχυρά συνεχής.

Απόδ: $(\Rightarrow)$ το δείξαμε στο (i)

$(\Leftarrow)$ θα δ.ο. $\overline{T(B_X)}^{\|\cdot\|}$ $\|\cdot\|$-συμπαγές στον Y.

Αρκεί να δ.ο. είναι ακολουθιακά $\|\cdot\|$-συμπαγές.

Έστω $(y_n) \subseteq \overline{T(B_X)}^{\|\cdot\|} \Rightarrow \forall n, \exists x_n \in B_X \mid \|y_n - T(x_n)\| < \frac{1}{n}$.

Επειδή X ανακλαστικός, $\exists$ υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) κ' $x \in X$ ώστε $x_{k_n} \xrightarrow{w} x$.

Εφόσον T ισχυρά συνεχής, $T(x_{k_n}) \xrightarrow{\|\cdot\|} T(x)$

Επί $\|y_{k_n} - T(x_{k_n})\| \to 0 \Rightarrow y_{k_n} \xrightarrow{\|\cdot\|} T(x)$ κ'

$T(x) \in \overline{T(B_X)}^{\|\cdot\|}$. $\boxtimes$

(iii) Έστω X ανακλαστικός χώρος Banach κ' $T : X \to \ell^1$ γραμμικός φραγμένος. Τότε, T συμπαγής.

Απόδ.: Λόγω του (ii), αρκεί να δ.ο. T ισχυρά συνεχής.

Έστω $x_n \xrightarrow{w} x$ στον X. Τότε, $T(x_n) \xrightarrow{w} T(x)$ (ο T είναι w-w συνεχής, άσκ. 9 (ii))

(Θ. Schur!) $\Longrightarrow$ $T(x_n) \xrightarrow{\|\cdot\|_1} T(x)$. $\boxtimes$

Σχόλιο: Στον ℓ^1 ισχύει:

K w-συμπαγές ανν $\|\cdot\|$-συμπαγές

($\Rightarrow$) Έστω K w-συμπαγές στον ℓ^1.
Θα δ.ο. K $\|\cdot\|$-συμπαγές.

Έστω $(x_n) \subseteq K$ = w-συμπαγές $\overset{\text{(Θ. Eberlein)}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ υπακολ. $x_{k_n} \xrightarrow{w} x \in K$ $\overset{\text{(Θ. Schur)}}{\Longrightarrow}$ $x_{k_n} \xrightarrow{\|\cdot\|} x$.

($\Leftarrow$) $\tau_w \subseteq \tau_{\|\cdot\|} \Rightarrow$ κάθε $\|\cdot\|$-συμπαγές είναι κ' w-συμπαγές.

<u>ΓΕΝΙΚΑ:</u> Αν τ_1, τ_2 τοπολογίες στο X με $\tau_1 \subseteq \tau_2$ κ' (X, τ_2) συμπαγής, τότε κ' (X, τ_1) συμπαγής.

Πράγματι κάθε τ_1-ανοικτή κάλυψη είναι κ' τ_2-ανοικτή κάλυψη.