16/01/2024

Θεώρημα Ανοικτής Απεικόνισης:

- Έστω X, Y χώροι Banach κ' $T : X \to Y$ γραμμικός φραγμένος κ' επί δηλ. $T(X) = Y$. Τότε, η T είναι ανοικτή δηλ.

$\forall\, G \subseteq X$ ανοικτό, το $T(G)$ είναι ανοικτό.

Συνέπειες:

- Έστω X, Y, $T : X \to Y$ όπως παραπάνω.

I. Εάν επιπλέον T 1-1, τότε είναι ισομορφισμός, δηλ. ο

$T^{-1} : Y \to X$ είναι φραγμένος. Πράγματι $\forall\, G \subset X$ ανοικτό,

$(T^{-1})^{-1}(G) = T(G) =$ ανοικτό $\Rightarrow T^{-1}$ συνεχής.

$\underline{\text{II.}}$ <u>(Σαν θεωρία!)</u> $T: X \to Y$ επί X, Y χώροι Banach.

Τότε, $\exists M > 0 \mid \forall y \in Y, \exists x \in X \mid y = T(x), \ \|x\| \leq M\|y\|$.

<u>Απόδ:</u> T ανοικτή $\Rightarrow T(B_X(0,1))$ ανοικτό στον Y, όπου

$B_X(0,1) = \{x \in X : \|x\| < 1\}$. Τότε, $0 \in T(B_X(0,1))$

$\Rightarrow \exists \delta > 0 \mid \quad B_Y(0,\delta) \subseteq T(B_X(0,1))$, όπου $B_Y(0,\delta) =$
$= \{y \in Y \mid \|y\| < \delta\}$.

Έστω $y \in Y$, $y \neq 0$. Τότε, $\dfrac{\delta}{2\|y\|} y \in B_Y(0,\delta)$

$$\Rightarrow \exists z \in B_X(0,1) \mid \quad \frac{\delta}{2\|y\|} y = T(z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = T\Big(\underbrace{\frac{2\|y\|}{\delta} z}_{x}\Big), \quad \|x\| = \frac{2}{\delta}\|y\| \cdot \|z\| \leq \frac{2}{\delta}\|y\|.$$

Θέτω $M = 2/\delta$.

Σχόλιο II.1: Από την απόδειξη του II προκύπτει ότι εάν X, Y χώροι με νόρμα κ' $T: X \to Y$ γραμμική ανοικτή, τότε: $\exists M > 0 \mid \forall y \in Y,\ \exists x \in X$ με $y = T(x)$, $\|x\| \leq M\|y\|$.

(Άρα κ' T επί.)

Σχόλιο II.2: Εάν X, Y, T όπως στο Θ. Ανοικτής Απεικόνισης (ή γενικότερα όπως στο προηγούμενο σχόλιο), τότε κάθε κλειστή μπάλα του Y περιέχεται στην εικόνα (μέσω του T) μιας κλειστής μπάλας του X.

Πράγματι, έστω $B_Y=\{y\in Y \mid \|y\|\leq 1\}$, $B_X=\{x\in X \mid \|x\|\leq 1\}$ κ' $M>0$ όπως στο Σχόλιο II.1.

Εάν $y\in B_Y$, $\exists\, x\in X \mid y=T(x)$, $\|x\|\leq M\|y\|\leq M$

$$\Rightarrow x\in M\cdot B_X = B_X[0,M] \Rightarrow B_Y \subseteq T(B_X[0,M]).$$

Έστω τυχαία κλειστή μπάλα $B_Y[y_0,r]=\{y \mid \|y-y_0\|\leq r\}$ του Y. Τότε,

$$B_Y[y_0,r] = y_0 + rB_Y \subseteq y_0 + rT(B_X[0,M])$$

κ' $y_0=T(x_0)$ για κάποιο $x_0\in X \Rightarrow$

$$B_Y[y_0,r] \subseteq T(x_0+B_X[0,rM]) =$$
$$= T(B_X[x_0,rM]).$$

III. Έστω X, Y χώροι Banach κ' $T: X \to Y$ γραμμικός φραγμένος επί. Εάν X ανακλαστικός, τότε κ' Y ανακλαστικός.

Απόδ: Σχόλιο II.2 $\Rightarrow \exists M>0 \mid B_Y \subseteq T(MB_X)$.

Αλλά X ανακλαστικός $\Rightarrow B_X$ w-συμπαγές στον X

$\Rightarrow MB_X$ w-συμπαγές. Αλλά T $w-w$ συνεχής

$\Rightarrow T(MB_X)$ είναι w-συμπαγές στον Y.

Επιπλέον, $\overline{B_Y}^{w} \overset{(\text{Mazur})}{=} \overline{B_Y}^{\|\cdot\|} = B_Y$

$\Rightarrow B_Y$ είναι w-κλειστό $\subseteq T(MB_X) =$

$= w$-συμπαγές

$\Rightarrow B_Y$ w-συμπαγές στον Y

$\Rightarrow Y$ ανακλαστικός.

IV. Έστω X γραμμικός χώρος κ' $\|\cdot\|$, $|\cdot|$ νόρμες στον X ώστε $(X, \|\cdot\|)$, $(X, |\cdot|)$ είναι **Banach**. Υποθέτουμε ότι $\|\cdot\|$, $|\cdot|$ συγκρίνονται, δηλ. $\exists\, M>0 \mid \forall x \in X$, $|x| \leq M\|x\|$. Τότε, οι $\|\cdot\|$, $|\cdot|$ είναι ισοδύναμες, δηλ. $\exists\, m>0 \mid m\|x\| \leq |x|$, $\forall x \in X$.

Απόδ: Έστω η ταυτοτική απεικόνιση $I_d : (X, \|\cdot\|) \to (X, |\cdot|)$.

Τότε, I_d γραμμικός, φραγμένος, επί κ' 1-1

$\overset{(I)}{\Longrightarrow}$ I_d ισομορφισμός δηλ. ο $I_d : (X, |\cdot|) \to (X, \|\cdot\|)$ είναι φραγμένος $\Rightarrow \exists\, C>0 \mid \forall x \in X$, $\|I_d(x)\| \leq C \cdot |x|$

$\Longrightarrow \|x\| \leq C|x|$ $(m = 1/C)$.

Εφαρμογή: $X = C[0,1] = \{u:[0,1]\to\mathbb{R} \mid u \text{ συνεχής}\}$

$\|u\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |u(t)|$ $\quad (X, \|\cdot\|_\infty)$ Banach

$\|u\|_1 = \int_0^1 |u(t)|\,dt$ $\quad (X, \|\cdot\|_1)$ χώρος με νόρμα

$$\|u\|_1 = \int_0^1 |u(t)|\,dt \le \|u\|_\infty, \quad \forall u\in X.$$

Εάν ήταν κ' $(X, \|\cdot\|_1)$ Banach, θα έπρεπε οι $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$ να είναι ισοδύναμες, δηλ. $\exists\, m>0 \mid \forall u\in X$, $m\|u\|_\infty \le \|u\|_1$.

Θέτω $u_n(t) = t^n$, $t\in[0,1]$, $n\ge 1$. Τότε

$$\|u_n\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} t^n = 1, \qquad \|u_n\|_1 = \int_0^1 t^n\,dt = \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad m \cdot 1 \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \Rightarrow \quad m = 0 \text{ (ΑΤΟΠΟ)}.$$

Άρα, ο $(C[0,1], \|\cdot\|_1)$ <u>δεν</u> είναι Banach.

<u>Θ. Κλειστού Γραφήματος</u> Έστω X, Y χώροι Banach

κ' $T: X \to Y$ γραμμικός με <u>κλειστό γράφημα</u>, δηλ.

"εάν $x_n \to x$ και $T(x_n) \to y$, τότε $y = T(x)$."

Τότε, T φραγμένος.

<u>ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΙΙ</u>.

1 Έστω X, Y χώροι Banach κ' $T: X \to Y$ γραμμικός

φραγμένος. ΤΠΕΙ:

(α) T ισομορφισμός (επί)

(β) (i) $T(X)$ $\|\cdot\|$- πυκνό στον Y

(ii) $\exists\, c > 0 \mid \|T(x)\| \geq c\|x\|, \forall x \in X$.

(α) $\Rightarrow$ (β) (i) T επί $\Rightarrow$ $\overline{T(X)}^{\|\cdot\|} = \overline{Y}^{\|\cdot\|} = Y$

(ii) $T^{-1} : Y \to X$ φραγμένος

$\Rightarrow \exists c>0 \mid \forall y \in Y,\quad \|T^{-1}(y)\| \leq c\|y\|$

$\Rightarrow \forall x \in X$, για $y = T(x)$ παίρνω $\|x\| \leq c\|T(x)\|$.

(β) $\Rightarrow$ (α) $\quad c\|x\| \leq \|T(x)\|,\ \forall x$

$\Rightarrow \ker T = \{0\} \Rightarrow$ T 1-1

Ισχυρισμός: $T(X)$ $\|\cdot\|$-κλειστός

$T(x_n) \xrightarrow{\|\cdot\|} y \quad \forall n,m,\ c\|x_n - x_m\| \leq \|T(x_n) - T(x_m)\|$

$\Rightarrow (x_n)$ Cauchy στον X = Banach $\Rightarrow x_n \to x$

για κάποιο x $\Rightarrow T(x_n) \to T(x) \Rightarrow y = T(x)$.

Αλλά $\overline{T(X)}^{\|\cdot\|} = Y \Rightarrow Y = T(X)$ δηλ. T επί

$T^{-1} : Y \to X$ Εάν $y \in Y \Rightarrow \exists x \mid y = T(x)$

$\Rightarrow c\|x\| \leq \|T(x)\| \Rightarrow c\|T^{-1}(y)\| \leq \|y\|$

$\Rightarrow \|T^{-1}(y)\| \leq \frac{1}{c}\|y\| \Rightarrow T^{-1}$ φραγμένος

$\Rightarrow T$ ισομορφισμός.