18 / 01 / 2024

Φυλλάδιο ΙΙ (συνέχεια)

③ $\forall x \in c_0$, ορίζουμε $\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} |x(k)|$.

Να δ.ο. η $\|\cdot\|$ είναι νόρμα στον c_0 αλλά ο $(c_0, \|\cdot\|)$ δεν είναι Banach.

<u>Απόδειξη:</u> $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ Banach, $\|x\|_\infty = \sup_{k \geq 1} |x(k)|$.

$\forall x \in c_0$, $\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} |x(k)| \leq \|x\|_\infty \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \|x\|_\infty$.

Αν ο $(c_0, \|\cdot\|)$ ήταν Banach, θα έπρεπε οι $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_\infty$ να είναι ισοδύναμες, δηλ. $\exists\, m > 0 \,|\, \forall x \in c_0$, $\|x\| \geq m \|x\|_\infty$.

Για "x" $= e_n$, $n \geq 1$ όπου $e_n(k) = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ 1, & k = n \end{cases}$

$e_1 = (1, 0, 0, \dots)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots)$, κ.λ.π

$\|e_n\|_\infty = 1$, $\|e_n\| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} e_n(k) = \frac{1}{2^n}$, $\forall n \geq 1$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2^n} \geq m \cdot 1 = m$, $\forall n \geq 1 \quad \Rightarrow \quad m = 0$
(ΑΤΟΠΟ).

Άρα, ο $(c_0, \|\cdot\|)$ <u>δεν</u> είναι Banach. $\boxtimes$

(5) Έστω X, Y χώροι με νόρμα κ' $T: X \to Y$ γραμμικός, φραγμένος τελεστής. Υποθέτουμε ότι

- T ανοικτή απεικόνιση
- X Banach.

Να δ.ο.

(i) $\exists M > 0 \mid \forall y \in Y, \ \exists x \in X$ με $y = T(x)$, $\|x\| \leq M \|y\|$.

(ii) ο Y είναι Banach.

(i) $B_X(0,1) = \{x \in X : \|x\| < 1\}$ = ανοικτό $\subseteq X$

$\overset{[T \text{ ανοικτή}]}{\Longrightarrow}$ $0 \in T[B_X(0,1)]$ ανοικτό $\subseteq Y$

$\Rightarrow \exists \delta > 0 \mid \quad B_Y(0,\delta) = \{y \in Y : \|y\| < \delta\} \subset T[B_X(0,1)]$.

Έστω $y \in Y$, $y \neq 0$. Τότε, $\frac{\delta}{2\|y\|} y \in B_Y(0,\delta) \subseteq T[B_X(0,1)]$

$$\Rightarrow \quad \exists\, z \in B_X(0,1) \;\Big|\; \frac{\delta}{2\|y\|} y = T(z)$$

$$\Rightarrow \quad y = T\Big(\underbrace{\frac{2\|y\|}{\delta} z}_{x}\Big) = T(x), \quad \|x\| = \frac{2\|y\|}{\delta}\|z\| \leq \frac{2\|y\|}{\delta}.$$

Θέτουμε $M = 2/\delta$.

<u>(ii)</u> Υπενθύμιση: <u>ΤΠΕΙ:</u>

<u>(α)</u> Y Banach

<u>(β)</u> εάν (y_n) με $\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\| < \infty$, τότε $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ συγκλίνει

δηλ. $\exists\, y \in Y \;\Big|\; \Big\|\sum_{k=1}^{n} y_k - y\Big\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Έστω $(y_n) \subseteq Y$ ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\| < \infty$.

$(i) \Rightarrow \forall n \geq 1,\ \exists x_n \in X$ ώστε

$y_n = T(x_n)$, $\|x_n\| \leq M\|y_n\|$.

Τότε, $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty \xRightarrow{(X \text{ Banach})} \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει

δηλ. $\exists x \in X \mid \sum_{k=1}^{n} x_k \xrightarrow{\|\cdot\|_X} x \xRightarrow{T \text{ συνεχής}}$

$T\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \xrightarrow{\|\cdot\|_Y} T(x)$ δηλ. $\sum_{k=1}^{n} T(x_k) \xrightarrow{\|\cdot\|_Y} T(x)$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} y_k \xrightarrow{\|\cdot\|_Y} T(x)$

δηλ. $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ συγκλίνει.

Άρα Y Banach. $\boxtimes$

⑥ Έστω $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ χώρος Hilbert κ' $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ γραμμικός.

(i) Έστω $x, y \in \mathcal{H}$ ώστε

$$\langle y - T(z), x - z \rangle \geq 0, \quad \forall z \in \mathcal{H}.$$

Να δ.ο. $y = T(x)$

<u>Απόδ:</u> Θα δ.ο. $y - T(x) = 0$. Αρκεί να δ.ο. $\forall u \in \mathcal{H}$,

$$\langle y - T(x), u \rangle = 0.$$

Έστω $u \in \mathcal{H}$. $\forall n$, θέτω $z_n = x - \frac{1}{n} u$

$$\Rightarrow \quad x - z_n = \frac{1}{n} u, \qquad T(z_n) = T(x) - \frac{1}{n} T(u) \xrightarrow{n \to \infty} T(x).$$

Λόγω της υπόθεσης,

$\forall n \geq 1, \quad \langle y - T(z_n), \; x - z_n \rangle \geq 0$

$\iff \langle y - T(z_n), \frac{1}{n} u \rangle \geq 0 \iff \frac{1}{n} \langle y - T(z_n), u \rangle \geq 0$

$\iff \quad \langle y - T(z_n), u \rangle \geq 0.$

για $n \to \infty$, $\quad \langle y - T(x), u \rangle \geq 0$, $\quad \forall u \in H.$

για "u" $= -u$,

$\langle y - T(x), -u \rangle \geq 0$

$\implies \quad \langle y - T(x), u \rangle \leq 0$

$\implies \langle y - T(x), u \rangle = 0, \quad \forall u \in H$

$\implies \quad y = T(x).$

(ii) Εάν $\langle Tx, x\rangle \geq 0$, $\forall x \in H$, τότε T φραγμένος.

Απόδ: Θα χρησιμοποιήσουμε το Θ. Κλειστού Γραφήματος. Έστω $(x_n) \subseteq H \mid x_n \to x$, $T(x_n) \to y$ $(x, y \in H)$. Θα δ.ο.

$$y = T(x).$$

Αρκεί να δ.ο. $\forall z \in H$, $\langle y - T(z), x - z \rangle \geq 0$.

Πράγματι έστω $z \in H$. $\forall n \geq 1$,

$$\langle T(x_n - z), x_n - z \rangle \geq 0$$

$$\Longleftrightarrow \langle T(x_n) - T(z), x_n - z \rangle \geq 0 \text{ Για } n \to \infty,$$

$$\langle y - T(z), x - z \rangle \geq 0. \quad \boxtimes$$

(12) Θεωρούμε το μέτρο Lebesgue "dt" στο $(0,1)$.

Έστω $u:(0,1)\to\mathbb{R}$ μετρήσιμη κ' $q>1$. Υποθέτουμε ότι

$\forall v\in L^q(0,1)$, ισχύει $u\cdot v\in L^1(0,1)$ δηλ. $\int_0^1 |u\cdot v|\,dt<\infty$.

Να δ.ο.

(i) $\exists M>0 \mid \forall v\in L^q$, $\|u\cdot v\|_1 \le M\cdot\|v\|_q$.

(Υπόδειξη: Θ. κλειστού γραφήματος σε κατάλληλο τελεστή).

Απόδ: Θεωρούμε τον τελεστή $T: L^q\to L^1$ με

$T(v)=u\cdot v$, $\forall v\in L^q$. T καλώς ορισμένος, γραμμικός.

Επίσης, οι $(L^q,\|\cdot\|_q)$, $(L^1,\|\cdot\|_1)$ είναι Banach.

Έστω $(u_n)\subseteq L^q$ με $u_n\xrightarrow{\|\cdot\|_q}\tilde{u}$, $T(u_n)\xrightarrow{\|\cdot\|_1} w$

όπου $\tilde{u}\in L^q$, $w\in L^1$. Θα δ.ο. $w=T(\tilde{u})=\tilde{u}\cdot v$

$$u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_q} \tilde{u} \in L^q, \qquad u_n \cdot v \xrightarrow{\|\cdot\|_1} w \in L^1.$$

Θα δ.ο. $w = \tilde{u} \cdot v$, δηλ.

$$w(t) = \tilde{u}(t) v(t), \quad \text{σ.π. στο } (0,1).$$

[Υπενθύμιση: Εάν $(\varphi_n) \subseteq L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ |

$$\varphi_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} \varphi \in L^p(\Omega)$$

τότε $\exists$ υπακολουθία (φ_{k_n}) της (φ_n) ώστε

$$\varphi_{k_n}(\omega) \to \varphi(\omega), \quad \text{σ.π. στο } \Omega \text{]}$$

Τότε, $\exists$ υπακολουθία (u_{k_n}) της (u_n) ώστε

$$u_{k_n}(t) \to \tilde{u}(t), \quad u_{k_n}(t) v(t) \to w(t), \quad \text{σ.π. στο } (0,1).$$

Τότε, $w(t) = \tilde{u}(t) v(t)$, σ.π. στο $(0,1)$.

Από Θ. Κλειστού Γραφ., T φραγμένος δηλ. $\exists\, M>0$:

$\forall v \in L^q, \quad \|T(v)\|_1 \leq M \cdot \|v\|_q \iff \|u \cdot v\|_1 \leq M \cdot \|v\|_q.$

(ii) Θεωρούμε το γραμμικό συναρτ.

$$\Phi_u : L^q \to \mathbb{R} \quad \text{με} \quad \Phi_u(v) = \int_0^1 u(t)\, v(t)\, dt,$$

$\forall v \in L^q$. Να δ.ο. $\Phi_u \in (L^q)^*$.

Απόδ: $\forall v \in L^q, \quad |\Phi_u(v)| \leq \int_0^1 |u(t)\, v(t)|\, dt = \|u \cdot v\|_1$

$\overset{(i)}{\leq} M \cdot \|v\|_q \implies \Phi_u$ φραγμένο.

(iii) Να δ.ο. $u \in L^p(0,1)$.

[<u>Υπόδ:</u> Θεωρήστε γνωστό το παρακάτω:

Εάν $h:(0,1)\to\mathbb{R}$ μετρήσιμη κ' $\forall\, v\in L^q$,

$$\int_0^1 hv = 0,$$

τότε $h=0$, σ.π.]

<u>Απόδ:</u> $\Phi_u \in (L^q)^* \Rightarrow \exists\ \underline{\tilde{u}\in L^p}\ \ (1/p+1/q=1)$,

$$\Phi_u(v) = \int_0^1 \tilde{u}\, v, \quad \forall\ \underline{v\in L^q}$$

$$\Leftrightarrow \forall\, v\in L^q,\quad \int_0^1 u\cdot v = \int_0^1 \tilde{u}\cdot v \Leftrightarrow \int_0^1 (\tilde{u}-u)\cdot v = 0$$

$$\Rightarrow \tilde{u}-u=0,\ \sigma.\pi. \Rightarrow u=\tilde{u}\ \ \sigma.\pi.$$

$$\Rightarrow u\in L^p. \quad \boxtimes$$