ΠΡΟΟΔΟΣ ΜΑΘ. ΑΝΑΛΥΣΗΣ, ΣΑΤΜ, 22/12/2023

Θέμα 1. (α) (**2 μον**) Βρείτε τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία της συνάρτησης

$$f(x,y) = x^4 - 4xy + 2y^2 - 10$$

(β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x,y) = ax^4 + by^4$, όπου a, b μη μηδενικές σταθερές.

(i) (**1 μον**) Αν a, b ομόσημα δείξτε ότι το $(0,0)$ είναι τοπικό ακρότατο της f.

(ii) (**1 μον**) Αν a, b ετερόσημα δείξτε ότι το $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο της f.

Θέμα 2. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

(i) (**2 μον**) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+4x+5}\,dx$

(ii) (**2 μον**) $\displaystyle\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}\,dx$

Θέμα 3. (α) (**1 μον**) Δώστε τους ορισμούς των συναρτήσεων $\cosh x$ και $\sinh x$ και δείξτε την ταυτότητα

$$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$$

(β) (**1 μον**) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^1 \cosh^2 x\,dx$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΘΕΜΑΤΟΣ 1:

(α) ***ΒΗΜΑ 1***:*Εύρεση των Κρίσιμων σημείων της f:*
Έχουμε $f_x(x,y) = 4x^3 - 4y$ και $f_y(x,y) = -4x + 4y$. Τα κρίσιμα σημεία της f είναι οι λύσεις του συστήματος $\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}$ ή ισοδύναμα $\begin{cases} x^3 - y = 0 \\ -x + y = 0 = 0 \end{cases}$. Η δεύτερη εξίσωση δίνει $y = x$ και με αντικατάσταση στην πρώτη παίρνουμε $x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 1$ ή $x = -1$. Αντίστοιχα έχουμε, $y = 0$ ή $y = 1$ ή $y = -1$, δηλαδή τα κρίσιμα σημεία είναι τα σημεία $(0,0),\ (1,1),\ (-1,-1)$.

ΒΗΜΑ 2: *Εύρεση των Τοπικών Ακροτάτων της f με το Κριτήριο της δεύτερης Παραγώγου:* Υπολογίζουμε τώρα τις δεύτερης τάξης μερικές παραγώγους της f και την ορίζουσα Δ του Εσσιανού πίνακα της f. Έχουμε $f_{xx}(x,y) = 12x^2,\ f_{xy}(x,y) = -4,\ f_{yy}(x,y) = 4$ και $\Delta(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}^2(x,y) = 48x^2 - 16$. Είναι $\Delta(0,0) = -16 < 0$ και άρα το $(0,0)$ σαγματικό σημείο. Επίσης $\Delta(1,1) = \Delta(-1,-1) > 0$ και $f_{xx}(1,1) = f_{xx}(-1,-1) > 0$. Άρα τα σημεία $(-1,-1)$ είναι σημεία τοπικού ελαχίστου.

(β) Επειδή $f_x(x,y) = 4x^3$ και $f_y(x,y) = by^3$ έχουμε ότι $f_x(0,0) = 0$ και $f_y(0,0) = 0$ και άρα το $(0,0)$ είναι κρίσιμο σημείο. Όμως επειδή $f_{xx}(x,y) = 12x^2,\ f_{yy}(x,y) = 12y^2$ και $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0) = 0$ έχουμε $f_{xx}(0,0) = f_{yy}(0,0) = f_{xy}(0,0) = 0$ οπότε $\Delta(0,0) = 0$ και συνεπώς το κριτήριο της Δεύτερης Παραγώγου δεν μπορεί να αποφανθεί.

Εξετάζοντας όμως τον τύπο της f βλέπουμε τα εξής:

(i) Έστω $a > 0$ και $b > 0$. Τότε $f(x,y) = ax^4 + by^4 \geq 0 = f(0,0)$ για όλα τα $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ και άρα το $(0,0)$ είναι σημείο ολικού ελαχίστου. Αντίστοιχα αν $a < 0$ και $b < 0$ τότε $f(x,y) \leq 0$ για όλα τα $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ και στην περίπτωση αυτή το $(0,0)$ είναι σημείο ολικού μεγίστου.

(ii) Έστω $a < 0$ και $b > 0$ (αντίστοιχα εργαζόμαστε αν $a > 0$ και $b < 0$). Τότε για όλα τα σημεία $(x,0)$ στον x-άξονα έχουμε $f(x,0) = ax^4 \leq 0$ ενώ για όλα τα σημεία $(0,y)$ στον y-άξονα $f(0,y) = by^4 \geq 0$. Άρα στον x-άξονα το $(0,0)$ είναι σημείο ελαχίστου ενώ στον y-άξονα σημείο μεγίστου, οπότε το $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΘΕΜΑΤΟΣ 2:

(i) Έχουμε

$$\int \frac{x}{x^2+4x+5}\, dx = \int \frac{x}{x^2+4x+4+1}\, dx = \int \frac{x}{(x+2)^2+1}\, dx.$$

Θέτουμε

$$u = x+2$$

και άρα $x = u-2$ και $dx = du$. Οπότε

$$\int \frac{x}{x^2+4x+5}\, dx = \int \frac{u-2}{u^2+1}\, du = \int \frac{u}{u^2+1}\, du - 2\int \frac{1}{u^2+1}\, du$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα θέτουμε

$$v = u^2+1$$

και άρα $dv = 2udu \Rightarrow udu = dv/2$. Συνεπώς,

$$\int \frac{u}{u^2+1}\, du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{v}\, dv = \frac{1}{2}\ln v = \frac{1}{2}\ln(u^2+1) = \frac{1}{2}\ln\left((x+2)^2+1\right).$$

Για το δεύτερο έχουμε

$$\int \frac{1}{u^2+1}\, du = \arctan u = \arctan(x+2).$$

Τελικά,

$$\int \frac{x}{x^2+4x+5}\, dx = \frac{1}{2}\ln\left((x+2)^2+1\right) + \frac{\arctan(x+2)}{2}.$$

(ii) Κάνουμε την αντικατάσταση $u = e^x$ και $du = e^x dx = udx \Rightarrow dx = \dfrac{du}{u}$, οπότε

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}\, dx &= \int \frac{u+1}{u^2+1}\cdot\frac{1}{u}\, du \\
&= \int \frac{u+1}{u(u^2+1)}\, du \\
&= \int \frac{u}{u(u^2+1)}\, du + \int \frac{1}{u(u^2+1)}\, du \\
&= \int \frac{1}{u^2+1}\, du + \int \frac{1}{u(u^2+1)}\, du \\
&= \arctan u + \int \frac{1}{u(u^2+1)}\, du.
\end{aligned}$$

Με την μέθοδο των απλών κλασμάτων βρίσκουμε σταθερές $A, B, C \in \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε

$$\frac{1}{u(u^2+1)} = \frac{A}{u} + \frac{Bu+C}{u^2+1}$$

Έχουμε

$$\frac{1}{u(u^2+1)} = \frac{A}{u} + \frac{Bu+C}{u^2+1} = \frac{Au^2+A}{u(u^2+1)} - \frac{Bu^2+Cu}{u(u^2+1)} = \frac{(A+B)u^2+Cu+A}{u(u^2+1)}$$

οπότε

$$(A+B)u^2+Cu+A = 1$$

και άρα $A = 1$, $C = 0$ και $B = -1$. Συνεπώς,

$$\frac{1}{u(u^2+1)} = \frac{1}{u} - \frac{u}{u^2+1}$$

οπότε

$$\int \frac{1}{u(u^2+1)}\, du = \int \Big(\frac{1}{u} - \frac{u}{u^2+1}\Big)\, du = \int \frac{1}{u}\, du - \int \frac{u}{u^2+1}\, du = \ln u - \frac{1}{2}\ln(u^2+1).$$

Από τα παραπάνω παίρνουμε τελικά

$$\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}\, dx = \arctan(e^x) + \ln(e^x) - \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) = \arctan(e^x) + x - \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΘΕΜΑΤΟΣ 3:

(α) Είναι $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ και $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. Έχουμε

$$\cosh^2 x = \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2e^x e^{-x}}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4}$$

και ομοίως

$$\sinh^2 x = \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4}$$

Άρα

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} - \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

(β) Θα δείξουμε ότι

$$\int \cosh^2 x \; dx = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{8} + \frac{x}{2}$$

οπότε $\displaystyle\int_0^1 \cosh^2 x \; dx = \frac{e^2 - e^{-2}}{8} + \frac{1}{2}$.

<u>α' τρόπος</u> (*με ολοκλήρωση κατά παράγοντες*) Έχουμε $(\sinh x)' = \cosh x$ και $(\cosh x)' = \sinh x$. Άρα εφαρμόζωντας παραγοντική ολοκλήρωση πάιρνουμε,

$$\begin{aligned}
\int \cosh^2 t \; dt = \int \cosh x (\sinh x)' \; dx &= \cosh x \sinh x - \int (\cosh x)' \sinh x \; dx \\
&= \cosh x \sinh x - \int \sinh^2 x \; dx \\
&= \cosh x \sinh x - \int (\cosh^2 x - 1) \; dx \\
&= \cosh x \sinh x - \int \cosh^2 x \; dx + x
\end{aligned}$$

Συνεπώς $\displaystyle 2\int \cosh^2 x \; dx = \cosh x \sinh x + x$ και άρα $\displaystyle\int \cosh^2 x \; dx = \frac{\cosh x \sinh x + x}{2}$. Επειδή

$$\cosh x \sinh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{4}$$

παίρνουμε τελικά ότι $\displaystyle\int \cosh^2 x \; dx = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{8} + \frac{x}{2}$.

<u>β' τρόπος</u> (*κατευθείαν χρησιμοποιώντας τον τύπο του* $\cosh x$)

$$\begin{aligned}
\int \cosh^2 x \; dx &= \int \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 \; dx \\
&= \int \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} \; dx \\
&= \frac{1}{4}\left(\int e^{2x} \; dx + \int e^{-2x} \; dx + \int 2 \; dx\right).
\end{aligned}$$

Επειδή $\displaystyle\int e^{2x} \; dx = \frac{1}{2}\int e^u \; du = \frac{e^u}{2} = \frac{e^{2x}}{2}$ και $\displaystyle\int e^{-2x} \; dx = -\frac{1}{2}\int e^u \; du = -\frac{e^u}{2} = -\frac{e^{-2x}}{2}$, έπεται ότι

$$\int \cosh^2 x \; dx = \frac{1}{4}\left(\frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{2} + 2x\right) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{8} + \frac{x}{2}$$