



## 8ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:  
Β. Γρηγοριάδης  
Κ. Παυλοπούλου  
Γ. Μανουσάκης

### Άσκηση 1 (Άλγεβρα Σειρών).

- (i) Δώστε το παράδειγμα δύο ακολουθιών  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  και  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  για τις οποίες η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  συγκλίνει αλλά οι σειρές  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  και  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  αποκλίνουν.
- (ii) Δείξτε ότι αν οι σειρές  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  και  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  συγκλίνουν τότε η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  συγκλίνει επίσης.
- (iii) Δείξτε ότι αν  $c \neq 0$  και η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$  συγκλίνει τότε και η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  συγκλίνει.

### Άσκηση 2 (Διερεύνηση Σύγκλισης). Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις ακόλουθες σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n, \quad \text{όπου } |x| \geq 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n + (-1)^{n+1}].$$

### Άσκηση 3. Δίνονται $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ και $n \geq 1$ . Δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^n x^{k-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

και

$$\sum_{k=1}^n x^k = \frac{x(1 - x^n)}{1 - x}.$$

**Υπόδειξη:** Ένας τρόπος να αποδειχθεί η πρώτη ισότητα είναι με επαγωγή. Ένας άλλος τρόπος είναι να υπολογίσετε:  $(1 - x) \cdot \sum_{k=1}^n x^{k-1} = \sum_{k=1}^n x^{k-1} - x \cdot \sum_{k=1}^n x^{k-1} = \dots$

### Άσκηση 4 (Εύρεση ορίου σειράς). Βρείτε το όριο των ακόλουθων σειρών:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^{n+3} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1} - 4^{n+2}}{5^{n+1}}.$$

---

**Άσκηση 5** (Κριτήριο Σύγκρισης). Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(n^2 + 1)}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-2}.$$

**Υπόδειξη:** Υπενθυμίζουμε την ανισότητα  $\sin x \leq x$  για κάθε  $x \geq 0$ .

**Άσκηση 6** (Κριτήριο Λόγου). Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot n!}{n^n}.$$

**Άσκηση 7** (Κριτήριο Ρίζας). Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}.$$

**Άσκηση 8.** Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές όπως ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos(n)}{3^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5 + 1/n)^n}{(2n)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n \cdot (n!)^2},$$

ως προς τη σύγκλιση.