Μαθηματική Ανάλυση και Γραμμική Άλγεβρα

Ασκήσεις στην Ανάλυση

Χειμερινό Εξάμηνο 2023-2024

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

7ο Φυλλάδιο

Διδάσκοντες:
Β. Γρηγοριάδης
Κ. Παυλοπούλου
Γ. Μανουσάκης

Άσκηση 1 (Διερεύνηση σύγκλισης). Θεωρούμε την ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ που ορίζεται ως εξής:

$$a_n = \frac{1+(-1)^n n^2}{2+3n+n^2} \quad n \geq 1.$$

Εξετάστε τις ακολουθίες $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ως προς τη σύγκλιση. (Δηλαδή είτε βρείτε το όριο είτε δείξτε ότι δεν συγκλίνουν.)

Υπόδειξη: Συγκλίνουν μόνο δύο από τις προηγούμενες ακολουθίες.

Άσκηση 2 (Ακολουθίες με μεταβλητό πλήθος προσθετέων). Θεωρούμε την ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ με

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}\,.$$

Δείξτε ότι για κάθε $n \geq 1$ ισχύει:

(i) $x_{n+1} - x_n > 0$,

(ii) $x_n < 1$.

Τι συμπεραίνετε για την ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$; (Μην επιχειρήσετε να υπολογίσετε κάποιο όριο.)

Άσκηση 3. Υπολογίστε τα όρια των πιο κάτω ακολουθιών:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n, \quad n \geq 1,$$

$$b_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n, \quad n \geq 1.$$

Υπόδειξη: Εκφράστε τις πιο πάνω ακολουθίες με τη βοήθεια της $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad n \geq 1.$

Άσκηση 4 (Η ακολουθία του αριθμού e - Απαιτητική). Θεωρούμε την ακολουθία $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \geq 1$.

(i) Δείξτε ότι

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{n} \cdot \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \quad \text{για κάθε } n \geq 1.$$

(ii) Δείξτε ότι $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$. **Υπόδειξη:** Χρησιμοποιείστε το (i) και την ανισότητα Bernoulli.

Άσκηση 5 (Αναδρομικά ορισμένη ακολουθία και σύγκλιση). Ορίζουμε την ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ με αναδρομή ως εξής:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} \quad n \geq 1.$$

Δείξτε ότι:

(i) $0 < a_n < 2$ για κάθε $n \geq 1$,

(ii) $a_n < a_{n+1}$ για κάθε $n \geq 1$,

(iii) $a_n \to \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Υπόδειξη. Στα (i) και (ii) χρησιμοποιείστε την Αρχή της Επαγωγής.

Άσκηση 6 (Αναδρομικά ορισμένη ακολουθία και σύγκλιση). Ορίζουμε την ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ με αναδρομή ως εξής:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 6 \cdot \frac{1+a_n}{7+a_n} \quad n \geq 1.$$

Δείξτε ότι

(i) $1 \leq a_n \leq 2$ για κάθε $n \geq 1$.

Υπόδειξη. Χρησιμοποιείστε την Αρχή της Επαγωγής. Μπορείτε να αναδιατυπώσετε τις ζητούμενες ανισότητες $1 \leq a_{n+1} \leq 2$ σε πιο απλές ισοδύναμες ανισότητες.

(ii) $a_{n+1} \geq a_n$ για κάθε $n \geq 1$.

(iii) $a_n \to 2$.