



Γραμμική Άλγεβρα

9. Εύρεση Αντίστροφου Πίνακα με Στοιχειώδεις Πράξεις Γραμμών

Κάλλια Παυλοπούλου

2023-2024

Εύρεση Αντίστροφου πίνακα (με στοιχειώδεις πράξεις)

Δίνεται ο τετραγωνικός πίνακας $A = [\alpha_{ij}] \in M_{\mu \times \mu}$.

Αν γράψουμε δίπλα στον πίνακα A τον μοναδιαίο I_μ και εφαρμόσουμε και στους δύο ταυτόχρονα (δηλαδή στον πίνακα $[A|I_\mu]$ διαστάσεων $\mu \times 2\mu$) τις ίδιες στοιχειώδεις πράξεις γραμμών, ώστε ο πίνακας A να μετασχηματιστεί σε ανηγμένο κλιμακωτό A_R , δηλαδή

$$[A|I_\mu] \rightarrow \dots \rightarrow [A_R|B]$$

τότε θα ισχύει:

- ❖ Αν $A_R = I_\mu$ τότε ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και $B = A^{-1}$.
- ❖ Αν $A_R \neq I_\mu$ τότε ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος.

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, με στοιχειώδεις γραμμοπράξεις.

Λύση:

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\gamma_2 \rightarrow \gamma_2 - 2\gamma_1 \\ \gamma_3 \rightarrow \gamma_3 - 3\gamma_1}}$$

A I_3

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_2 \rightarrow -1 \cdot \gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_3 \rightarrow \gamma_3 + 2 \cdot \gamma_2}$$

Παράδειγμα 1 (συνέχεια)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_2 \rightarrow \gamma_2 - 2 \cdot \gamma_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} \gamma_1 \rightarrow \gamma_1 - 3 \cdot \gamma_3 \\ \gamma_1 \rightarrow \gamma_1 - 2 \cdot \gamma_2 \end{array}}$$

A_R

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right] = [I_3 | B]$$

Αντίστροφος A^{-1}

Μοναδιαίος
 3×3

Ο πίνακας A_R που προέκυψε από τις γραμμοπράξεις είναι ίσος με τον I_3 .
Δηλαδή, ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον I_3 .

Άρα ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος με

$$A^{-1} = B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 2

Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \alpha \end{bmatrix}$ με $\alpha \in \mathbb{R}$. Να εξεταστεί αν υπάρχει ο αντίστροφός τους και αν ναι, να τον υπολογίσετε με τη βοήθεια των γραμμοπράξεων.

Λύση: α) $[A|I_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 12 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_2 \rightarrow \gamma_2 - 3\gamma_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{array} \right]$

A_R

Ο πίνακας που προέκυψε από τις γραμμοπράξεις, ο A_R , δεν είναι ίσος με τον I_2 .
Δηλαδή, ο A δεν είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον I_2 .



Άρα ο πίνακας A **δεν** είναι αντιστρέψιμος.

Παράδειγμα 2-συνέχεια

β) Για τον πίνακα B έχουμε:

$$[B|I_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & \alpha & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_2 \rightarrow \gamma_2 - 3\gamma_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 6 & -3 & 1 \end{array} \right].$$

Παρατηρούμε ότι

1) αν $\alpha - 6 = 0$, δηλαδή $\alpha = 6$, τότε ο τελευταίος πίνακας παίρνει τη μορφή:

$$B_R \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{array} \right]$$

Ο πίνακας B_R , δεν είναι ίσος με τον I_2 .
Άρα ο B δεν είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον I_2 .

Άρα ο πίνακας B **δεν** είναι αντιστρέψιμος.

Παράδειγμα 2-συνέχεια

2) Αν όμως $\alpha \neq 6$, τότε ο πίνακας

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 6 & -3 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_2 \rightarrow \frac{1}{\alpha-6}\gamma_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-3}{\alpha-6} & \frac{1}{\alpha-6} \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\gamma_1 \rightarrow \gamma_1 - 2\gamma_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{\alpha}{\alpha-6} & -\frac{2}{\alpha-6} \\ 0 & 1 & \frac{-3}{\alpha-6} & \frac{1}{\alpha-6} \end{array} \right] = [I_2 | B^{-1}].$$

$$B_R = I_2$$

$$B^{-1}$$

Άρα

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{\alpha-6} & -\frac{2}{\alpha-6} \\ \frac{-3}{\alpha-6} & \frac{1}{\alpha-6} \end{bmatrix}, \text{ για } \alpha \neq 6.$$

Υπενθύμιση (για πίνακα $A \in M_{\mu \times \mu}$)

- Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν η ορίζουσά του είναι διάφορη του μηδενός.
- Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν το ομογενές σύστημα ($A \cdot \vec{x} = \vec{0}$) μ εξισώσεων με μ αγνώστους και πίνακα συντελεστών A έχει μία και μοναδική λύση τη μηδενική.
- Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν ο πίνακας A είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον μοναδιαίο I_{μ} .